2008-06-11 Klassenarbeit 5 Klasse 10c Mathematik

Lösung *Version 2008-06-14*

1 Cindy hat 3000 € geerbt.

a) Den Betrag will sie so anlegen, dass sie in 20 Jahren doppelt so viel Geld hat.
Berechne, zu welchem Zinssatz sie das Geld anlegen muss.

Das Kapital im Jahr x erhält man, indem man das Startkapital n-mal mit dem Steigungsfaktor (1+p) multipliziert, wobei p angibt, wie viel Prozent Zinsen man bekommt:

$$K(x)=K(0)\cdot(1+p)^x \;\rightarrow\; K(20)=2\cdot 3000=3000\cdot(1+p)^{20} \;\rightarrow\; 2=(1+p)^{20} \;\rightarrow\; 1+p=\sqrt[20]{2}$$

$\rightarrow\; p=\sqrt[20]{2}-1\approx 0{,}035$ *Cindy muss für das Geld 3,5% Zinsen erhalten.*

b) Berechne, nach wie viel Jahren sich das Geld bei einem Zinssatz von 3% vervierfacht hat.

Jedes Jahr vermehrt sich das Geld um das 1,03-fache.

$$K(x)=4\cdot K(0)=K(0)\cdot 1{,}03^x \;\rightarrow\; 4=1{,}03^x \;\rightarrow\; x=\log_{1{,}03}4=\frac{lg\,4}{lg\,1{,}03}\approx 46{,}8995\approx 47$$

Das Kapital hat sich nach etwa 47 Jahren vervierfacht.

---

2 Zur Fußball-Europa-Meisterschaft gibt es wieder einmal verschiedene Bilder-Sammelalben.
Firma 1 verkauft ein Sammelalbum für 13,90 € und nimmt für ein Bild 25 Cent.
Bei Firma 2 kostet das Album nur 3,90 €, dafür muss man aber für jedes Bild 27 Cent bezahlen.
Insgesamt braucht man für ein vollständig ausgefülltes Album jeweils 512 Bilder.
Welches Angebot ist günstiger, wenn man davon ausgeht, dass man nur genau 512 Bilder kaufen muss?

a) Beschreibe, wie man mit der Tabellenkalkulation die Lösung finden kann.
Gib an, was in welche Spalte, was in welche Zeile kommt und gib die Formeln an, die mehrfach kopiert werden.

Spalte A: Anzahl der Bildchen (ab A3 abwärts)
Spalte B: Preis für Album 1
Spalte C: Preis für Album 2
Zeile 1: Überschriften
Zeile 2: in B2: 13,90 in C2: 3,90
Zeile 3: in A3: 1 in B3: =B2+0,25 in C3: =C2+0,27
Zeile 4: in A4: =A3+1
Die Zellen A4, B3 und C3 werden nach unten kopiert

	A	B	C
1	Anzahl der Bilder	Preis Album 1	Preis Album 2
2		13,90	3,90
3	1	14,15	4,17
4	2	14,40	4,44
5	3	14,65	4,71
6	4	14,90	4,98
7	5	15,15	5,25
8	6	15,40	5,52
9	7	15,65	5,79
10	8	15,90	6,06
11	9	16,15	6,33

b) Berechne die Bilderzahl, für die beide Angebote gleich viel kosten.

Für Album 1 muss man den Grundpreis 13,90 € und 0,25 € · x für x Bilder bezahlen, für Album 2 sind es 3,90 € und 0,27 € · x für x Bilder:

$$A_1(x)=0{,}25\cdot x+13{,}90 \quad A_2(x)=0{,}27\cdot x+3{,}90$$

$$A_1(x)=A_2(x) \;\rightarrow\; 0{,}25x+13{,}9=0{,}27x+3{,}9$$

$$\rightarrow\; 10=0{,}02x \;\rightarrow\; x=\frac{10}{0{,}02}=500$$

498	496	137,90	137,82
499	497	138,15	138,09
500	498	138,40	138,36
501	499	138,65	138,63
502	500	138,90	138,90
503	501	139,15	139,17
504	502	139,40	139,44
505	503	139,65	139,71
506	504	139,90	139,98
507	505	140,15	140,25
508	506	140,40	140,52

Für 500 Bilder muss man bei beiden Angeboten gleich viel bezahlen.
Das kann man auch am entsprechenden Ausschnitt in der Tabelle erkennen.

3 Ein Souvenirhändler bietet Pyramiden in verschiedenen Größen an. Die Pyramiden haben eine rechteckige Grundfläche. Die kleinste Pyramide hat eine Grundfläche mit den Seiten a=3cm und b=2cm. Die Höhe der Pyramide beträgt h=5cm. Bei allen Pyramiden, gleich welcher Größe, ist das Längen-Verhältnis entsprechender Seiten konstant.
Bei den verschieden großen Pyramiden wächst die Höhe zur nächst größeren Pyramide jeweils um 1cm an.

a) Gib an und begründe, welche Art Wachstum der Grundflächen bei den immer größer werdenden Pyramiden vorliegt.

Bei der Höhe liegt lineares Wachstum vor (bei jedem Vergrößerungsschritt wird eine Konstante addiert).
Auf Grund der Strahlensätze wachsen dann auch die Seiten der Grundfläche linear.
Da sich der Flächeninhalt der Grundfläche aus „Breite mal Tiefe" berechnet, wächst die Grundfläche quadratisch an.

b) Berechne, um wieviel Zentimeter die Höhe wachsen muss, damit die Grundfläche 10-mal so groß ist wie die Grundfläche der kleinsten Pyramide.

Wächst die Höhe um das x-fache an, so wächst die Grundfläche um das x^2-fache.
Da $x^2=10$ *gilt also* $x=\sqrt{10}\approx 3{,}16$. *Die Höhe muss also* $\sqrt{10}\cdot 5\,cm\approx 15{,}8\,cm$ *betragen, also um* $15{,}8\,cm-5\,cm=10{,}8\,cm$ *bzw. 11 cm wegen der Schrittweite 1 cm angewachsen sein.*

c) Berechne, um wieviel Zentimeter die Höhe wachsen muss, damit das Volumen 10-mal so groß ist wie das Volumen der kleinsten Pyramide.

Das Volumen wächst kubisch (wegen „Breite mal Tiefe mal Höhe") mit der Höhe, also gilt hier $x^3=10 \;\rightarrow\; x=\sqrt[3]{10}\approx 2{,}15$. *Die Höhe muss* $\sqrt[3]{10}\cdot 5\,cm\approx 10{,}8\,cm$ *betragen, also um* $10{,}8\,cm-5\,cm=5{,}8\,cm$ *bzw. 6 cm wegen der Schrittweite 1 cm angewachsen sein.*

---

4 Es war einmal ein Königreich, in dem der König am Jahresende von allen Untertanen 10% ihres Vermögens als Steuer beanspruchte. Der Untertan Hägar sparte über viele Jahre hinweg immer genau 1000 Taler pro Jahr. Wie hat sich wohl die Größe seines Vermögens entwickelt?

Beschreibe durch Angabe wichtiger Formeln, wie man mit der Tabellenkalkulation die Entwicklung des Vermögens ermitteln kann und berechne, wie hoch das Vermögen nach vielen Jahren sein wird.

Im 1. Jahr spart Hägar 1000 Taler und muss dann am Jahresende 10% davon abgeben, also 100 Taler.
Zu Beginn des 2. Jahres besitzt Hägar also 900 Taler. Am Jahresende werden von diesen 900 Talern und den neu gesparten 1000 Talern wieder 10% abgezogen.
Daraus folgt für die Tabelle (nur eine von mehreren denkbaren Lösungen):
Zeile 1: Überschriften
Spalte A: Anzahl der Jahre, beginnend mit Jahr 0 (in A2: 0 ; in A3: =A2+1 ; usw.)
*Spalte B: Vermögen zu Beginn des Jahres (in B2: 0 ; in B3: =(B2+1000)*0,9;usw.)*

	A	B
1	Jahr	Vermögen in Talern
2	0	0,00
3	1	900,00
4	2	1710,00
5	3	2439,00
6	4	3095,10
7	5	3685,59
8	6	4217,03
9	7	4695,33
10	8	5125,80
11	9	5513,22
12	10	5861,89
13	11	6175,70
14	12	6458,13
15	13	6712,32
16	14	6941,09
17	15	7146,98
18	16	7332,28
19	17	7499,05
20	18	7649,15
135	133	8999,99
136	134	8999,99
137	135	8999,99
138	136	8999,99
139	137	9000,00
140	138	9000,00
141	139	9000,00
142	140	9000,00

Ab Zeile 139 ändert sich der Wert des Vermögens in Spalte B nicht mehr.
Nach vielen Jahren wird also das Vermögen 9000 Taler betragen.

Rechnung dazu:
Das neue Vermögen (links) ergibt sich aus dem alten Vermögen plus 1000 Taler minus 10% Steuer (rechts):
$$V_{neu} \leftarrow (V_{alt}+1000)-0{,}1\cdot(V_{alt}+1000)=0{,}9\cdot(V_{alt}+1000)$$
Das Vermögen ändert sich nicht mehr, wenn zwischen dem V_{neu} auf der linken Seite und dem V_{alt} auf der rechten Seite nicht mehr unterschieden werden kann.
Also setzen wir V_{neu} = V_{alt} = V und rechnen:
$$V=0{,}9\cdot(V+1000) \;\rightarrow\; V=0{,}9\cdot V+900 \;\rightarrow\; 0{,}1\cdot V=900 \;\rightarrow\; V=9000$$
Auch hier ergeben sich 9000 Taler als Grenzwert für das Vermögen.

5 Zeige, dass folgende Tabelle zu einem quadratischen Wachstum gehören kann und bestimme nachvollziehbar den noch fehlenden Zahlenwert für n=7.

n	1	2	3	4	5	6	7
f(n)	-3	2	10	21	35	52	?=72

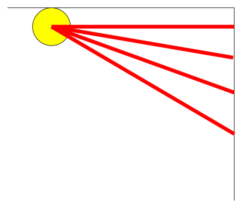
1. Differenzenfolge: +5 +8 +11 +14 +17 +20

2. Differenzenfolge: +3 +3 +3 +3 +3

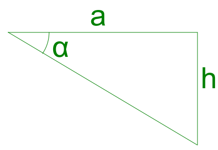
Da die 2. Differenzenfolge für die angegebenen Werte konstant ist, kann ein quadratisches Wachstum vorliegen.
Die Werte werden nun solange nach rechts hin ergänzt (rote Zahlen), bis der Wert f(7) berechnet werden kann. Es ergibt sich f(7)=72.

---

6 In der Stadt gab es ein Optiker-Geschäft, bei dem sich an der Decke des Vorbaus eine Kreisscheibe mit einem darauf angebrachten Laserpointer mit konstanter Geschwindigkeit drehte. Dadurch wurde an die Wand des Geschäftes ein roter Punkt projiziert, der sich nach unten hin immer schneller bewegte.



a) Gehen wir davon aus, dass zunächst der Strahl genau waagrecht verläuft und dabei den Startpunkt auf der Wand markiert.
Berechne, um wie viel sich der rote Punkt vom Startpunkt aus nach unten bewegt hat, wenn die Scheibe sich um 10°, um 20° und um 30° gedreht hat.
Die Mitte der Scheibe ist von der Wand 1,5m entfernt.



Im rechtwinkligen Dreieck (siehe Abbildung rechts) gilt die Beziehung $\tan\alpha=\frac{h}{a}$.

Mit den gegebenen Werten folgt daraus: $h_\alpha=a\cdot\tan\alpha=1{,}5\,m\cdot\tan\alpha$

$\alpha=10° \rightarrow h_{10°}=0{,}26\,m$; $\alpha=20° \rightarrow h_{20°}=0{,}55\,m$; $\alpha=30° \rightarrow h_{30°}=0{,}87\,m$

b) Überlege und gib an, ob es sich bei der Zunahme des Weges um ein lineares, ein quadratisches oder ein exponentielles Wachstum handeln kann und begründe die von Dir gegebene Antwort.

Anmerkung: „Zunahme des Weges" kann verstanden werden 1. als Wegstrecke, die bei der Zunahme des Winkels um 10° zurückgelegt wird oder 2. als Zunahme der Gesamtstrecke von der Decke des Vorbaus bis zum aktuellen Ort des Laserpunktes.
Hier wird entsprechend Aufgabenteil a) mit Interpretation 2 gerechnet. Interpretation 1 ist aber auch gültig und gibt analoge Ergebnisse.

Zu den Untersuchungen kann man noch den „Messwert" $\alpha=0° \rightarrow h_{0°}=0\,m$ *hinzunehmen.*

Für lineares Wachstum müssten sich die berechneten h-Werte der Reihe nach um einen konstanten Wert unterscheiden. Es ergeben sich die Differenzen 0,26 - 0 = 0,26 ; 0,55 - 0,26 = 0,29 ; 0,87 - 0,55 = 0,32. Die Ergebnisse sind nicht gleich. Es liegt also kein lineares Wachstum vor.

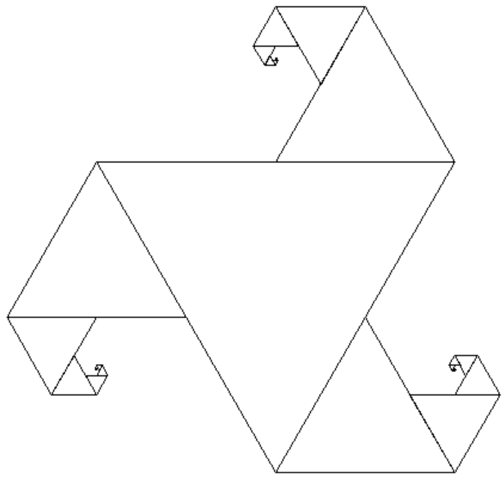
Für quadratisches Wachstum müsste die 2. Differenzenfolge konstant sein. Die Differenzen der oben berechneten Ergebnisse liefern diese 2. Differenzenfolge: 0,29 - 0,26 = 0,03 ; 0,32 - 0,29 = 0,03.
Im Rahmen der Genauigkeit ergeben sich tatsächlich (allerdings bei nur 2 Werten) gleiche Werte.
Dass allerdings doch kein quadratisches Wachstum vorliegen kann, sieht man, wenn man versucht, den Weg zwischen $h_{80°}$ *und* $h_{90°}$ *zu berechnen.* $h_{90°}$ *existiert nicht, weil der Laserstrahl dann parallel zur Wand verläuft und diese nicht erreicht. Der Weg zwischen* $h_{80°}$ *und* $h_{90°}$ *müsste unendlich lang sein und damit ergäbe die 2. Differenzenfolge garantiert nicht den Wert 0,03.*

Auch exponentielles Wachstum liegt nicht vor, da sonst der Quotient zweier aufeinander folgender Werte immer konstant wäre:

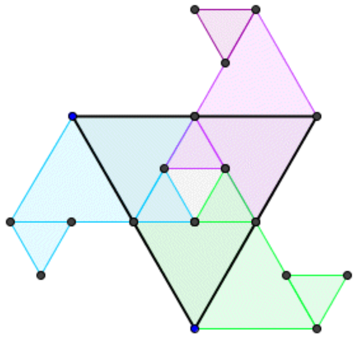
$\frac{h_{10°}}{h_{0°}}$ *geht nicht (Division durch 0)* ; $\frac{h_{20°}}{h_{10°}}=\frac{0{,}55}{0{,}26}\approx 2{,}12$; $\frac{h_{30°}}{h_{20°}}=\frac{0{,}87}{0{,}55}\approx 1{,}58$

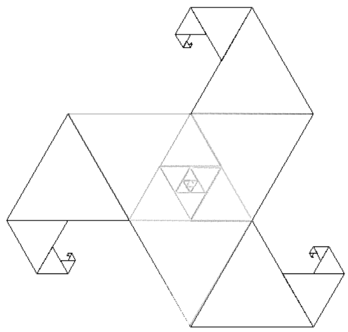
7 Bei der nebenstehend abgebildeten Dreiecksblume sind alle Dreiecke gleichseitig und das Dreieck in der Mitte hat die Seitenlänge 1.
Wie aus der Zeichnung zu erkennen ist, wird beim Übergang zum nächst kleineren Dreieck die Seitenlänge halbiert.

a) Berechne, wie groß der Flächeninhalt sämtlicher Dreiecke zusammen ist.



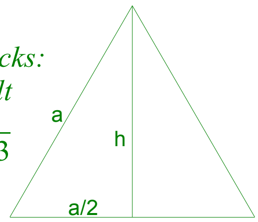
Dreht man die äußeren Dreiecks-Schlangen jeweils um 60° um die Ecken des großen zentralen Dreiecks, so füllen sie den Innenraum des großen Dreiecks vollständig und überlappungsfrei aus. Für die gesamte Fläche ergibt sich also das Doppelte der Fläche des großen Dreiecks.





Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks:
Nach Pythagoras gilt

$$h=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{4}}=\frac{a}{2}\cdot\sqrt{3}$$



Daraus folgt:

$$A_a=\frac{1}{2}\cdot a\cdot h=\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{a}{2}\cdot\sqrt{3}=\frac{a^2}{4}\cdot\sqrt{3}$$

Mit a=1 beträgt der gesamte Flächeninhalt

$$A_{gesamt}=2\cdot A_1=2\cdot\frac{1}{4}\cdot\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0{,}87$$

Es sollte ja aber „berechnet" werden... :

Da beim Übergang zu einem kleineren Dreieck die Seitenlänge halbiert wird, wird die Dreiecksfläche jeweils nur noch $\frac{1}{4}$ *der größeren Fläche betragen.*

Die zweitgrößten Dreiecke haben wegen $a=\frac{1}{2}$ *den Flächeninhalt* $A=\frac{\sqrt{3}}{16}$. *Eine angehängte Dreiecks-Schlange hat damit den Flächeninhalt*

$$A_{Schlange}=\frac{\sqrt{3}}{16}+\frac{\sqrt{3}}{16}\cdot\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{16}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{16}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3+\ldots=\frac{\sqrt{3}}{16}\cdot\left(1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\ldots\right)=\frac{\sqrt{3}}{16}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{16}\cdot\frac{4}{3}=$$

$$\frac{1}{4\cdot\sqrt{3}}\approx 0{,}144$$

. Die Gesamtfläche setzt sich aus dem großen Dreieck und 3 Dreiecks-Schlangen zusammen:

$$A_{gesamt}=A_{groß}+3\cdot A_{Schlange}=\frac{\sqrt{3}}{4}+3\cdot\frac{1}{4\cdot\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0{,}87$$

Benutzt wurde die Formel für die geometrische Reihe $s=\frac{a}{1-q}$ *(Formelsammlung Seite 32)*

b) (nur für Zusatzpunkte):
Berechne den <u>Umfang</u> der gesamten Figur (also nur die Längen der außen liegenden Streckenabschnitte berücksichtigen!).

Bei allen Dreiecken liegen 3 halbe Seitenlängen an der Außenseite. Das bedeutet für das zentrale Dreieck eine Strecke der Länge $3\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ *, für das nächst kleinere Dreieck die Länge* $3\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ *usw.*

Für eine Dreiecks-Schlange ergibt sich also die Gesamtlänge

$$\frac{3}{4}+\frac{3}{8}+\frac{3}{16}+\frac{3}{32}+\ldots=\frac{3}{4}\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots\right)=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{3}{4}\cdot 2=\frac{3}{2}$$

Der Gesamtumfang setzt sich zusammen aus

$$U_{gesamt}=U_{groß}+3\cdot U_{Schlange}=\frac{3}{2}+3\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{2}+\frac{9}{2}=\frac{12}{2}=6$$

Der Gesamtumfang ist also doppelt so groß wie der Umfang des zentralen Dreiecks.

VIEL ERFOLG BEI DER LETZTEN
ARBEIT IN DER SEK. I