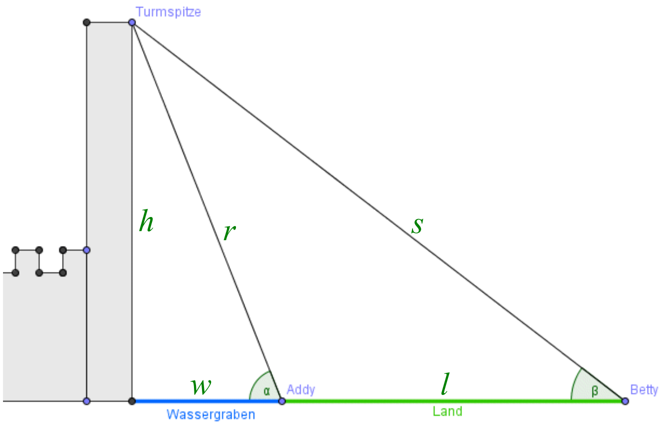
Lösung *Version 2008-05-11*

1 Addy und Betty besichtigen eine Burg mit einem hohen Turm, der direkt am Wassergraben der Burg steht.
Um die Breite des Wassergrabens herauszufinden, stellt sich Addy direkt an den Wassergraben und misst einen Steigungswinkel zur Turmspitze von 70°.
Betty führt die Messung 10 m vom Wassergraben entfernt durch und misst einen Steigungswinkel von 60°.

a) Berechne die Breite des Wassergrabens.

b) Berechne die Höhe des Turms.



Es gilt $\tan\alpha=\frac{h}{w} \rightarrow h=w\cdot\tan\alpha$ *und* $\tan\beta=\frac{h}{w+l} \rightarrow h=(w+l)\cdot\tan\beta$

Daraus folgt

$$w\cdot\tan\alpha=(w+l)\cdot\tan\beta=w\cdot\tan\beta+l\cdot\tan\beta \rightarrow w\cdot(\tan\alpha-\tan\beta)=l\cdot\tan\beta \rightarrow w=\frac{l\cdot\tan\beta}{\tan\alpha-\tan\beta}$$

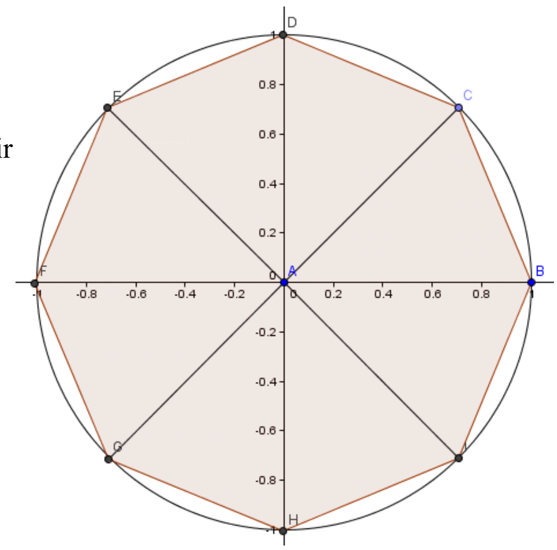
Weiter gilt $h=w\cdot\tan\alpha=\frac{l\cdot\tan\alpha\cdot\tan\beta}{\tan\alpha-\tan\beta}$

Mit α=70°, β=60° und l=10 m ergeben sich die Lösungen w=17,06 m und h=46,86 m.

---

2 Bei der Näherungs-Berechnung von π haben wir den Umfang eines Kreises durch den Umfang von n-Ecken angenähert.
Mit Hilfe der Winkelfunktionen (sin, cos, tan) hätten wir die Rechnung damals vereinfachen können.

a) Berechne mit Hilfe der Winkelfunktionen für einen Kreis mit dem Radius 1 den Umfang des <u>ein</u>beschriebenen 8-Ecks (siehe Zeichnung).

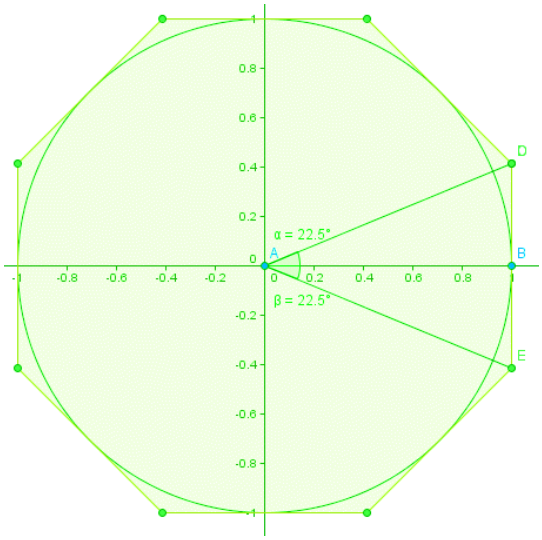


Da der Vollwinkel von 360° um den Punkt A herum durch die Diagonalen des 8-Ecks in 8 gleich große Winkel geteilt wird, hat jeder Mittelpunktswinkel den Wert 45°.
Jedes Dreieck ist gleichschenklig mit den Seitenlängen 1.
Mit Hilfe des Kosinus-Satzes kann also eine der Seiten des 8-Ecks berechnet werden:

$$s_8^2=1^2+1^2-2\cdot1\cdot1\cdot\cos45°=2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}=2-\sqrt{2} \rightarrow s_8=\sqrt{2-\sqrt{2}}\approx0{,}765$$

Für den Umfang muss diese Seitenlänge noch mit 8 multipliziert werden: $U_8=8\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}}\approx6{,}12$

b) Berechne allgemein für ein dem Kreis umbeschriebenes n-Eck den Umfang dieses n-Ecks (eigene Zeichnung erstellen!).



Die Zeichnung zeigt wieder ein 8-Eck, diesmal dem Kreis umbeschrieben. Das 8-Eck wird so gelegt, dass eine Seite senkrecht durch den Punkt (1/0) verläuft.
Der Mittelpunktswinkel hat wieder den Wert 45°, das Dreieck ABD hat damit den Winkel 22,5° bei A, also den halben Mittelpunktswinkel.
Die halbe Seitenlänge (BD) lässt sich mit dem Tangens berechnen, da die Länge AB=1 der Seite AB bekannt ist.

Übertragen auf ein n-Eck bedeutet das: Im Dreieck ABD ist bei A der Winkel mit der Winkelgröße $\frac{360°}{2 \cdot n} = \frac{180°}{n}$ *zu finden.*

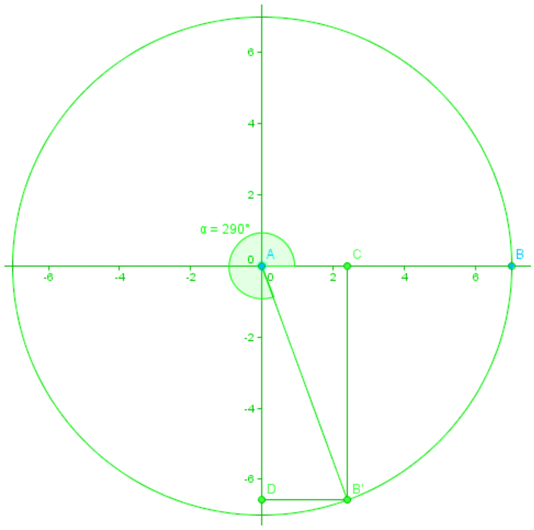
Für die halbe Seitenlänge gilt: $\tan \frac{180°}{n} = \frac{\frac{1}{2} \cdot s_n}{1} = \frac{s_n}{2}$

Ganze Seitenlänge: $s_n = 2 \cdot \tan \frac{180°}{n}$

Umfang des n-Ecks: $U_n = n \cdot s_n = 2\text{n} \cdot \tan \frac{180°}{n}$

---

3 Vor einigen Jahren habt Ihr die Drehung eines Punktes zeichnerisch mit Hilfe von Zirkel und Geodreieck durchgeführt. Jetzt könnt Ihr auch rechnerisch das Ergebnis ermitteln.
Berechne die x- und y-Koordinaten des Punktes B', der sich ergibt, wenn man den Punkt B(7/0) um 290° gegen der Uhrzeigersinn um den Punkt (0/0) dreht.



Die Koordinaten des Punktes B' sind zu bestimmen.
Als x-Koordinate ergibt sich der Kosinus und als y-Koordinate der Sinus des Drehwinkels (Radius r=7):

$$\cos 290° = \frac{x}{7} \;\rightarrow\; x = 7 \cdot \cos 290° \approx 2{,}39$$

$$\sin 290° = \frac{y}{7} \;\rightarrow\; y = 7 \cdot \sin 290° \approx -6{,}58$$

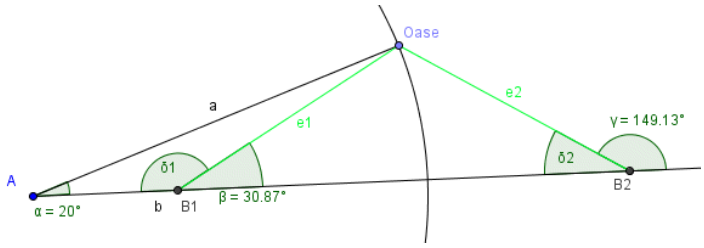
Der Punkt B' hat also etwa die Koordinaten B'(2,39/-6,58)

---

4 Zwei Forscher A und B haben sich in der Wüste verlaufen. Sie sind sich nicht einig, in welcher Richtung die nächste Oase liegt. Darum trennen sie sich und gehen auf schnurgeradem Weg mit konstanter Geschwindigkeit jeder in die von ihm für richtig gehaltene Richtung.
Ihre Wege schließen einen Winkel von 20° ein.
Lange Zeit später, nachdem Forscher A 15 km gelaufen ist, meldet sich A bei B über Sprechfunk und teilt mit, dass er die Oase gefunden hat. B war langsamer und hat deshalb weniger Strecke zurückgelegt als A.
B ist zu diesem Zeitpunkt noch 10 km von der Oase entfernt (was er allerdings nicht weiß).

a) Berechne, um wie viel Grad Forscher B nun von seinem Weg abweichen muss, damit er auch zur Oase kommt.

In der maßstabsgerechten Zeichnung sieht man, dass es zwei mögliche Lösungen gibt.



Betrachten wir das Dreieck A-B-Oase (a=15, e=10):
Mit dem Sinussatz kann man den Winkel δ bestimmen:

$$\frac{\sin\delta}{a}=\frac{\sin 20°}{e} \rightarrow \sin\delta=\frac{a\cdot\sin 20°}{e}=\frac{15\cdot\sin 20°}{10}=1{,}5\cdot\sin 20°\approx 0{,}513 \rightarrow \delta_1\approx 30{,}9°;\delta_2\approx 149{,}1°$$

Da Forscher B nicht so weit gegangen ist wie Forscher A, muss hier der Winkel richtig sein, der größer als 90° ist. Der Winkel, um den der Forscher B seine Richtung ändern muss, ist der Ergänzungswinkel zu 180°: β=180°-149,1°=30,9°.

b) Berechne, wie lang der Weg ist, den Forscher B bis zur Benachrichtigung durch seinen Kollegen A zurückgelegt hat.

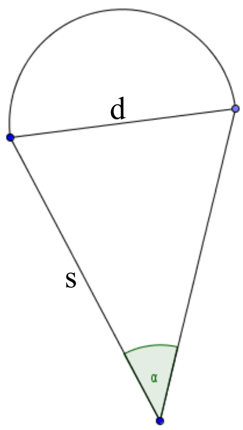
Der Innenwinkel des betrachteten Dreiecks an der Oase beträgt 180°-20°-149,1°=10,9°.
Mit dem Sinussatz lässt sich nun Strecke b berechnen:

$$\frac{b}{\sin 10{,}9°}=\frac{e}{\sin 20°} \rightarrow b=e\cdot\frac{\sin 10{,}9°}{\sin 20°}=10\cdot\frac{\sin 10{,}9°}{\sin 20°}\approx 5{,}5$$

Forscher B ist also 5,5 km gegangen, bevor er den Funkspruch erhalten hat.

---

5 Bei einer Eistüte ist die Seitenkante s doppelt so lang wie der Durchmesser d der oberen kreisförmigen Öffnung. Berechne den Öffnungswinkel α an der Spitze.



In der Lösungszeichnung erkennt man (beachte, dass s=2d):

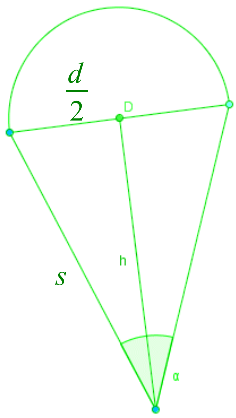
$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\frac{d}{2}}{s}=\frac{\frac{d}{2}}{2d}=\frac{d}{4d}=\frac{1}{4} \rightarrow \frac{\alpha}{2}\approx 14{,}48° \rightarrow \alpha\approx 28{,}96°\approx 29°$$

andere Rechnung mit Kosinussatz:

$$d^2=s^2+s^2-2\cdot s\cdot s\cdot\cos\alpha=2\cdot s^2-2\cdot s^2\cdot\cos\alpha=2\cdot s^2\cdot(1-\cos\alpha) \rightarrow$$

$$d^2=2\cdot(2d)^2\cdot(1-\cos\alpha)=8\cdot d^2\cdot(1-\cos\alpha) \rightarrow \frac{1}{8}=1-\cos\alpha \rightarrow$$

$$\cos\alpha=\frac{7}{8} \rightarrow \alpha\approx 29°$$



Viel Erfolg bei der Bearbeitung der Aufgaben!