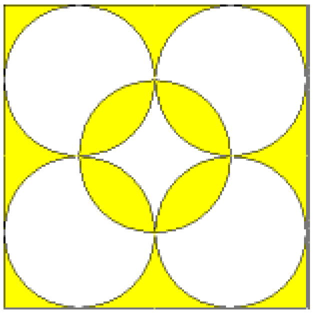
2008-02-20 Klassenarbeit 3 Klasse 10c Mathematik

Lösung *Version 2008-03-09*

1 a) Berechne in nebenstehender Zeichnung den Gesamt-Flächeninhalt der farbig unterlegten Flächenstücke.

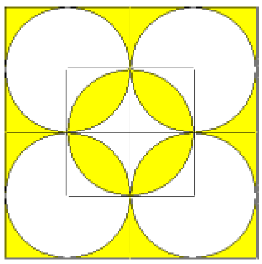
b) Berechne die Gesamtlänge aller Begrenzungslinien der farbig unterlegten Flächenstücke.

Rechne bei a) und bei b) mit a=12



a

a) In der Hilfsfigur (unten) wurden einige Hilfslinien eingezeichnet.
Man erkennt nun, dass die Kenntnis des Flächeninhaltes eines der kleinen gelben Eckstücke ausreicht, um den gelben Flächeninhalt auszurechnen:
4 Eckstücke ergeben sich, wenn von einem kleinen Quadrat der Kreis subtrahiert wird (gemeint sind natürlich immer die Flächeninhalte). Ein kleines Quadrat hat die Kantenlänge $\frac{a}{2}$ *und der Radius des dazu gehörigen Kreises hat die Länge* $\frac{a}{4}$ *:*



a

$$A_{4\,Ecken}=\left(\frac{a}{2}\right)^2-\pi\cdot\left(\frac{a}{4}\right)^2=\frac{a^2}{4}-\pi\cdot\frac{a^2}{16} \rightarrow A_{1\,Ecke}=\frac{a^2}{16}-\pi\cdot\frac{a^2}{64}$$

Gelbe Fläche im mittleren Quadrat : Man muss 8 kleine Eckstücke vom Quadrat abziehen: $A_{4\,Linsen}=\left(\frac{a}{2}\right)^2-8\cdot\left(\frac{a^2}{16}-\pi\cdot\frac{a^2}{64}\right)=\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{2}+\pi\cdot\frac{a^2}{8}=\pi\cdot\frac{a^2}{8}-\frac{a^2}{4}$

Nun bleiben noch die 3/4-Kreise mit jeweils 3 Eckstücken übrig.
Es sind also 12 dieser Eckstücke hinzuzufügen:

$$\pi\cdot\frac{a^2}{8}-\frac{a^2}{4}+12\cdot\left(\frac{a^2}{16}-\pi\cdot\frac{a^2}{64}\right)=\pi\cdot\frac{a^2}{8}-\frac{a^2}{4}+3\cdot\frac{a^2}{4}-\pi\cdot3\cdot\frac{a^2}{16}=2\cdot\frac{a^2}{4}-\pi\cdot\frac{a^2}{16}=\frac{a^2}{2}-\pi\cdot\frac{a^2}{16}=\left(\frac{1}{2}-\frac{\pi}{16}\right)\cdot a^2$$

Der gelbe Flächeninhalt beträgt also etwa $0{,}3\cdot a^2=43{,}7$.

b) Die Begrenzungslinien B setzen sich zusammen aus 5 vollen Kreisumfängen und dem Umfang des Quadrates: $B=5\cdot2\cdot\pi\cdot\frac{a}{4}+4\cdot a=\left(\frac{5}{2}\cdot\pi+4\right)\cdot a\approx11{,}85\cdot a=142{,}25$

---

2 Eine Pappröhre der Höhe 20 cm und dem Radius 6 cm wird längs aufgeschnitten (siehe dunkle Strecke in der Zeichnung) und um einen zylinderförmigen Gegenstand gleicher Höhe eng gelegt. Dabei bleibt aber $\frac{1}{4}$ der Mantelfläche dieses Zylinders unbedeckt.

Berechne das Volumen des Zylinders.

Da durch die Pappe nur 3 Teile des Zylinders bedeckt werden und 1 Teil frei bleibt, ist der Umfang des Zylinders $\frac{4}{3}$ *-mal so groß wie der Umfang der Pappe.*

Wegen $U=2\cdot\pi\cdot r$ *sind Umfang und Radius proportional, d. h. der Radius des Zylinders ist auch* $\frac{4}{3}$ *-mal so groß wie der Radius der Papprolle, also misst er 8 cm.*

Daraus folgt das Volumen des Zylinders: $V_{Zylinder}=\pi\cdot8^2\cdot20\,cm^3=1280\,\pi\,cm^3\approx4021\,cm^3$

3 Zu Ostern wollen Johannes und Margarethe selbst hergestellte Pralinen verschenken. Dazu soll eine kugelförmige (Durchmesser 2 cm) Masse mit dem Grundstoff Marzipan mit einem 1 mm dicken Schokoladenmantel umgeben werden. Die beiden haben noch 200 g Schokoladenmasse zu Hause. Berechne, wieviel Pralinen mit dieser Schokolade hergestellt werden können.

Die Dichte von Schokolade beträgt $\varrho = 1{,}3\,\frac{g}{cm^3}$.

Das Schokoladenvolumen für eine Marzipan-Kugel ergibt sich aus der Differenz der Kugelvolumina von Kugeln mit dem Radius r_2 = 1,1 cm und r_1 = 1,0 cm:

$$V_{Schokolade} = \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r_2^3 - \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r_1^3 = \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot\left(r_2^3 - r_1^3\right) = \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot(1{,}1^3 - 1{,}0^3)\,cm^3 \approx 1{,}386\,cm^3$$

Die Masse ergibt sich nach $\varrho = \frac{m}{V}$ *zu* $m = \varrho\cdot V = 1{,}3\,\frac{g}{cm^3}\cdot 1{,}386\,cm^3 = 1{,}802\,g$

Die Anzahl ergibt sich nun zu $\frac{200\,g}{1{,}802\,g} = 110{,}96 \approx 111$.

4 Ein Salzstreuer hat die Form eines Kegelstumpfes mit aufgesetzter Halbkugel. Die Grundfläche des Streuers hat den Durchmesser 4,0 cm, beim oberen Abschluss des Kegelstumpfes beträgt der Durchmesser 3,4 cm. Insgesamt (also mit Halbkugel) hat der Salzstreuer die Höhe 6,0 cm.
Berechne das Volumen des Salzstreuers.

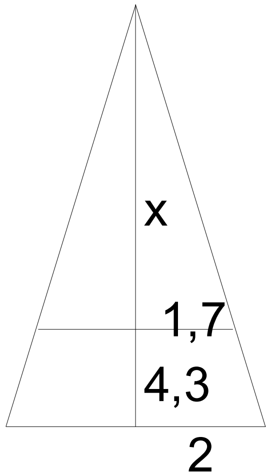
Der Radius der Halbkugel ist halb so groß wie der Durchmesser des oberen Abschlusskreises des Kegelstumpfes.Daraus folgt:

1. Die Höhe des Kegelstumpfes beträgt $6{,}0 - \frac{1}{2}\cdot 3{,}4 = 4{,}3$ *(Einheit jeweils cm).*

2. Das Volumen der Halbkugel beträgt $\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot 1{,}7^3\,cm^3 = 10{,}3\,cm^3$.

Die Hilfszeichnung zeigt unten den Kegelstumpf mit den Abmessungen.
Auf Grund der Strahlensätze gilt:

$$\frac{x+4{,}3}{2} = \frac{x}{1{,}7} \;\rightarrow\; 1{,}7x + 7{,}31 = 2x \;\rightarrow\; 7{,}31 = 0{,}3x \;\rightarrow\; x = 24{,}4$$



Das Volumen des Kegelstumpfes berechnet sich aus dem Volumen des großen Kegels minus Volumen des kleinen Kegels:

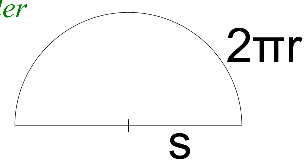
$$V_{Kegelstumpf} = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 2^2\cdot(24{,}4+4{,}3) - \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 1{,}7^2\cdot 24{,}4 = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot(114{,}8 - 70{,}4) = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 44{,}4 \approx 46{,}5$$

Gesamtes Volumen: $V = V_{Kegelstumpf} + V_{Halbkugel} = 46{,}5\,cm^3 + 10{,}3\,cm^3 = 56{,}8\,cm^3$

---

5 Ein halbkreisförmiges Papier (Radius 10 cm) wird zu einem Kegelmantel gebogen.
Berechne die Höhe des dabei entstehenden Kegels.

Der Radius des Halbkreises ist die Seitenlänge des Kegels und der Kreisbogen ist der Umfang des Kegelbodens.



Es gilt also: $\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\pi\cdot s = 2\cdot\pi\cdot r \;\rightarrow\; r = \frac{1}{2}\cdot s = 5\,cm$

Die Höhe des Kegels ergibt sich aus $h = \sqrt{s^2 - r^2} = \sqrt{100-25}\,cm = \sqrt{75}\,cm \approx 8{,}66\,cm$

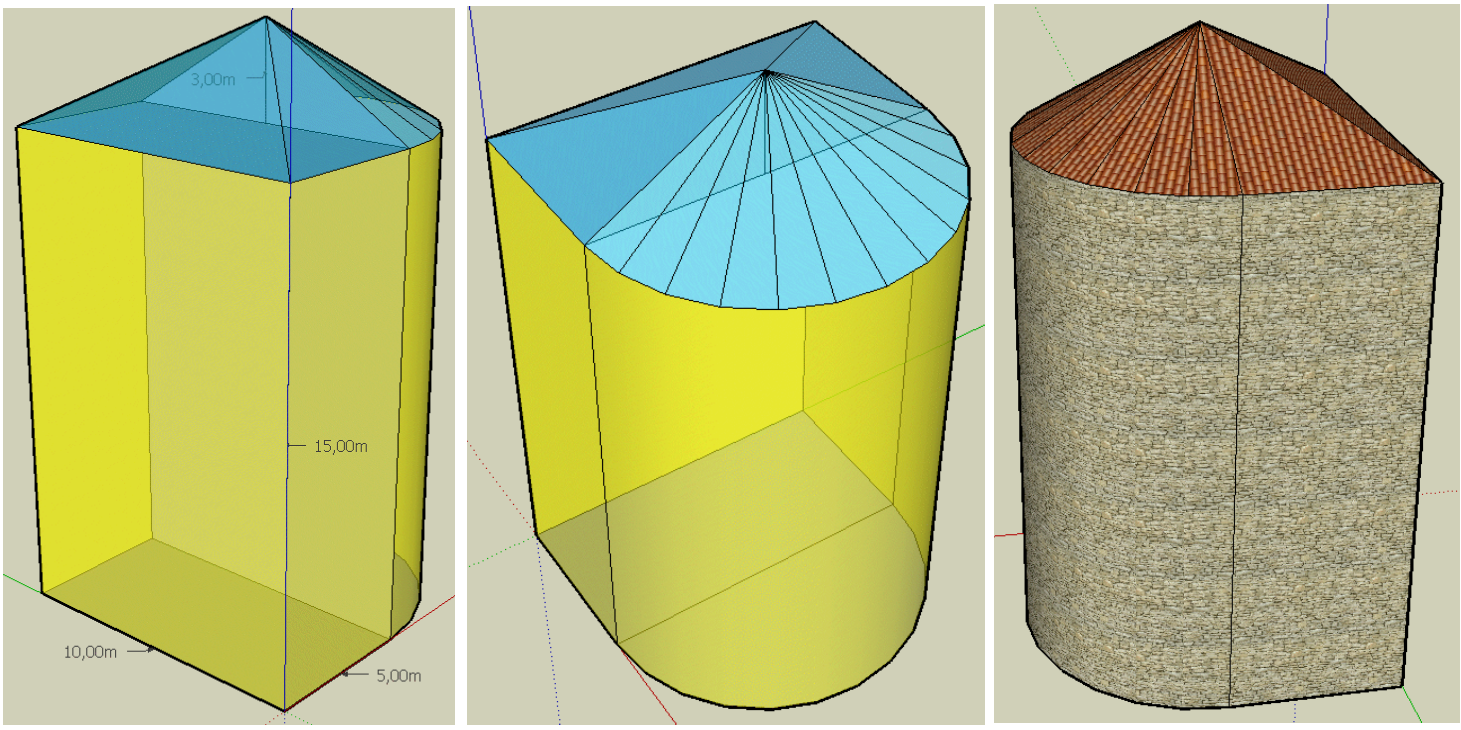
6 In Osnabrück steht ein alter Turm der Stadtbefestigung (Bucksturm).

Anmerkung: Die folgenden Angaben sind nur Näherungswerte, damit man einfacher rechnen kann.

Der Turm ist auf einem quadratischen Grundriss der Seitenlänge 10 m gebaut.
Die eine Hälfte ist „rund“, die andere „eckig“.
Der gemauerte Teil hat die Höhe 15 m, der Dachstuhl ist 3 m hoch.
Die anderen Eigenschaften des Baus kann man aus den Abbildungen entnehmen.

Berechne

a) das Volumen des gesamten Turms (einschließlich Dachraum),
b) den Flächeninhalt der mit Ziegeln belegten Dachfläche und
c) den Flächeninhalt der gemauerten Fläche.



a) Das Volumen setzt sich zusammen aus einem Quader, einem halben Zylinder, einem halben Kegel und einer halben Pyramide:

Quader: $V_{Quader} = 10 \cdot 5 \cdot 15\, m^3 = 750\, m^3$

halber Zylinder: $V_{halber\ Zylinder} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 15\, m^3 = 187{,}5 \cdot \pi\, m^3 \approx 589{,}0\, m^3$

halber Kegel: $V_{halber\ Kegel} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 3\, m^3 = 12{,}5 \cdot \pi\, m^3 \approx 39{,}3\, m^3$

halbe Pyramide: $V_{halbe\ Pyramide} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 10^2 \cdot 3\, m^3 = 50\, m^3$

Volumen des Turms: $V_{Turm} = (750 + 589 + 39{,}3 + 50)\, m^3 = 1428{,}3\, m^3$

b) Der Flächeninhalt der Dachfläche setzt sich zusammen aus einem halben Kegelmantel und 3 Dreiecken:

halber Kegelmantel: $M_{halber\ Kegelmantel} = \frac{\pi \cdot r \cdot s}{2} = \frac{\pi \cdot 5 \cdot \sqrt{34}}{2}\, m^2 \approx 45{,}8\, m^2$ *wegen* $s = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$

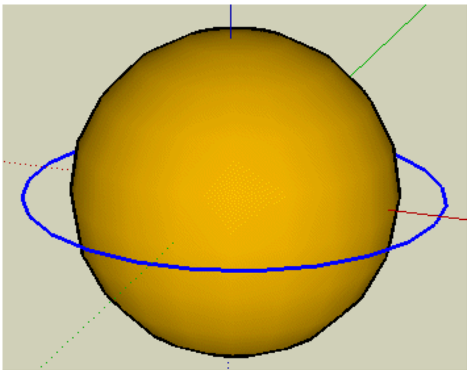
Die beiden kleinen Dreiecke sind rechtwinklig (an der Verbindungsstelle von Quader und Zylinder). Die Dachschräge (Höhe des Dreiecks) ist gleich der Seitenlänge des Kegels, die Grundseite ist gleich der halben Turmbreite: $A_{kleines\ Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \sqrt{34}\, m^2$ *Das große Dreieck besteht aus zwei kleinen Dreiecken.*

Insgesamt liegen also 4 kleine Dreiecke vor: $A_{alle\ Dreiecke} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \sqrt{34}\, m^2 = 10 \cdot \sqrt{34}\, m^2 \approx 58{,}3\, m^2$

Gesamte Dachfläche: $45{,}8\, m^2 + 58{,}3\, m^2 = 104{,}1\, m^2$

c) Die Wandfläche setzt sich zusammen aus einem halben Zylinder und aus einem großen Rechteck und zwei kleinen Rechtecken, wobei das große Rechteck doppelt so groß ist wie jedes der kleinen Rechtecke.

$$M_{Turm} = \frac{1}{2} \cdot M_{Zylinder} + 4 \cdot A_{kleines\ Rechteck} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 15\, m^2 + 4 \cdot 5 \cdot 15\, m^2 = 75\, \pi\, m^2 + 300\, m^2 \approx 535{,}6\, m^2$$



7 Legt man um den „Äquator“ einer Apfelsine mit dem Radius 5 cm ein Band ganz eng und verlängert dieses Band dann um 1 m, so bleibt zwischen dem kreisförmig gelegten Band und der Apfelsine ein Abstand d.
Wiederholt man dieses Vorgehen bei der Erde (Umfang 40 000 km), so bleibt hier derselbe Abstand d zwischen Erde und Band.

Berechne den Wert von d und begründe, warum der Abstand gleich sein muss.

Der Umfang einer Kugel mit dem Radius r beträgt 2πr.
Verlängert man den Umfang um 1, so wird der Radius größer - er heiße nun R.

Es gilt: $2 \cdot \pi \cdot R = 2 \cdot \pi \cdot r + 1 \;\rightarrow\; R = \frac{2 \cdot \pi \cdot r + 1}{2 \cdot \pi} = r + \frac{1}{2 \cdot \pi} \approx r + 0{,}16$

Der große Radius ist also um ca. 0,16 m = 16 cm größer als der kleine Radius, unabhängig von der Größe des Radius!
Also gilt der Abstand d = 16 cm sowohl bei der Apfelsine als auch bei der Erde.

VIEL ERFOLG BEI DER BEARBEITUNG DER AUFGABEN !