2007-12-19 Klassenarbeit 2 Klasse 10c Mathematik

Lösung *Version 2007-12-19*

1 a) Der Physiklehrer der 10c sucht (wie immer völlig zufällig) aus 28 Schüler(inne)n[1] 4 aus, die einen Physikversuch als Gruppe durchführen sollen. Berechne, wie viel Möglichkeiten der Physiklehrer dabei hat.

Ziehen mit einem Griff: n=28 ; k=4 . Es gibt $\binom{28}{4}=20475$ *Möglichkeiten.*

b) Bei einem anderen Versuch sollen die Schüler so ausgesucht werden, dass jeder beim Versuch eine bestimmte Aufgabe erhält. Berechne, wie viel Möglichkeiten es nun gibt.

Die Lösung aus 1a muss noch mit der Anzahl multipliziert werden, die angibt, wieviel Möglichkeiten man hat, die 4 Schüler „anzuordnen“. Das sind 4! Möglichkeiten:

$4!\cdot\binom{28}{4}=24\cdot 20475=491400$ *Möglichkeiten hat der Physiklehrer um seine Schüler auszuwählen.*

c) Eine Gruppe von 10 Schülern wettet, dass genau 3 von ihnen für den Versuch ausgewählt werden. Berechne die Wahrscheinlichkeit in Prozent, dass diese Vermutung auch zutrifft.

Anzahl der gewünschten Ergebnisse: Anzahl für 3 aus 10 mit einem Griff multipliziert mit 1 (gehört nicht zur Gruppe) aus 18 (alle anderen Schüler) mit einem Griff.

Anzahl aller Ergebnisse: 4 aus 28 mit einem Griff.

$$\frac{\binom{10}{3}\cdot\binom{18}{1}}{\binom{28}{4}}=\frac{120\cdot 18}{20475}=\frac{2160}{20475}\approx 0{,}105$$ *Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt etwa 10,5%.*

d) Da 4 aus 28 ausgewählt werden, also $\frac{1}{7}$ der Klasse, schlägt ein Schüler vor, 7 Kugeln in einen Beutel zu legen, 6 mit roter Farbe und 1 gelbe Kugel. Jeder Schüler zieht nun eine Kugel und legt sie nach dem Anschauen wieder in den Beutel zurück. Wer eine gelbe Kugel gezogen hat, ist für den Physikversuch ausgewählt.

α) Berechne, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass damit genau 4 Schüler für den Versuch ausgewählt werden.

Es gibt nur 2 Ergebnisse mit festen Wahrscheinlichkeiten, es wird mehrfach gezogen mit Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge.

Man darf also die Formel $B(n;p;k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$ *verwenden:*

$$B\left(28;\frac{1}{7};4\right)=\binom{28}{4}\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^4\cdot\left(\frac{6}{7}\right)^{24}\approx 0{,}211$$ *Die Wahrscheinlichkeit beträgt etwa 21,1%.*

β) Beurteile, ob diese Art der Auswahl geeignet ist, um genau 4 Experimentatoren zu finden.

Diese Art der Auswahl ist ungeeignet, da nur in etwa 20% aller Fälle genau 4 Schüler ausgewählt werden. In etwa 80% aller Fälle sind es also mehr oder weniger als 4 Schüler.

---

1 Auch wenn es im weiteren Verlauf des Textes nicht explizit formuliert wird sind natürlich in allen Aufgaben mit „Schüler“ auch die Schülerinnen gemeint.

2 Zeige durch geeignete Umformungen, dass für alle natürlichen Zahlen n und k gilt: $\binom{n+k}{k}=\binom{n+k}{n}$.

Linke Seite: $\binom{n+k}{k}=\frac{(n+k)!}{k!\cdot((n+k)-k)!}=\frac{(n+k)!}{k!\cdot n!}$

Rechte Seite: $\binom{n+k}{n}=\frac{(n+k)!}{n!\cdot((n+k)-n)!}=\frac{(n+k)!}{n!\cdot k!}$

Die rechten Seiten der beiden Umformungen sind gleich, also stimmt die zu zeigende Gleichung.

---

3 Der Mathelehrer der 10c behauptet, seine Klasse sei besser als die gleich große 10g. Um das zu überprüfen, stellt er zusammen mit dem Lehrer der 10g einen Test mit 13 Fragen zusammen. Es wird jeweils ermittelt, wie viel Schüler die Fragen richtig beantwortet haben:

Nr. der Frage	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
richtig aus 10c	17	23	22	22	17	18	23	27	20	19	4	25	27
richtig aus 10g	12	18	24	11	9	17	20	25	19	14	6	13	28
	+	+	-	+	+	+	+	+	+	+	-	+	-

Bestimme mit Hilfe eines Vorzeichentests, ob man sagen kann, dass die 10c die bessere Klasse ist. Gehe dabei von einer Irrtumswahrscheinlichkeit von α = 5% aus. Entscheide Dich mit Begründung für einen 1-seitigen oder einen 2-seitigen Test.

Da nicht die Frage gestellt ist, ob die Klassen ungleiche Fähigkeiten besitzen, sondern ob die 10c besser ist, wird ein 1-seitiger Test durchgeführt mit n=13 ; p=0,5 und α=5%.

Normalfallhypothese: Die beiden Klassen sind gleich gut.

Aus der entsprechenden Tabelle ergibt sich der Ablehnungsbereich zu {10, 11, 12, 13}.

Da 10-mal ein + vorhanden sind, wird die Normalfallhypothese abgelehnt und angenommen, dass die 10c die bessere Klasse ist. Die Wahrscheinlichkeit, dass diese Einschätzung falsch ist, beträgt 5%.

---

4 Ein Spieler kauft 2 Würfel (W6), die speziell behandelt sind. Bei Würfel A taucht die 6 mit der Wahrscheinlichkeit 0,2 auf und bei Würfel B mit der Wahrscheinlichkeit 0,4. Leider verliert der Spieler einen Würfel und weiß nicht, welcher übriggeblieben ist. Er vermutet, dass er den Würfel A behalten hat und will das mit Hilfe von 40 Würfen in einem 1-seitigen Test mit der Irrtumswahrscheinlichkeit α = 5% untersuchen.

a) Gib an, was ein Fehler 2. Art ist.

Ein Fehler 2. Art liegt vor, wenn die Nullhypothese angenommen wird, obwohl sie nicht gilt.

In diesem Fall heißt das: Man nimmt an, dass Würfel A (p=0,2) vorhanden ist und der Test scheint das zu bestätigen. In Wirklichkeit liegt aber Würfel B (p=0,4) vor. Hier macht man einen Fehler 2. Art.

b) Berechne für die beschriebene Situation die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art.

Zunächst wird der Annahmebereich für n=40 und p=0,2 ermittelt: {0, 1, ... , 11, 12}

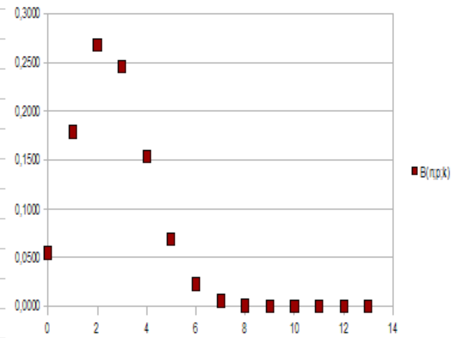
Dieser Bereich ist der Ablehnungsbereich für n=40 und p=0,4. Als Irrtumswahrscheinlichkeit liest man in der Tabelle ab: 0,1285 Der Fehler 2. Art beträgt also etwa 13%.

c) Gib an, wie die Formel heißen kann, die in der folgenden Tabelle in der Zelle B6 steht.

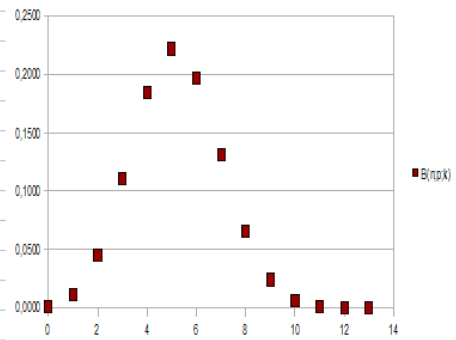
Die Formel könnte heißen: *=KOMBINATIONEN(E2;A6)*F2^A6*(1-F2)^(E2-A6)*

Viel Erfolg bei der Bearbeitung der Aufgaben!

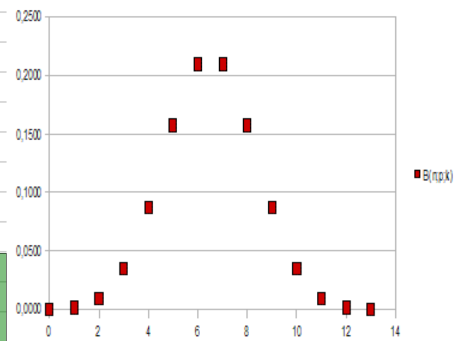
k	B(n;p;k)	Summe-B(n;p;k) 0→n	Summe-B(n;p;k) n→0	n	p
0	0,0550	0,0550	1,0000	13	0,2
1	0,1787	0,2336	0,9450		
2	0,2680	0,5017	0,7664		
3	0,2457	0,7473	0,4983		
4	0,1535	0,9009	0,2527		
5	0,0691	0,9700	0,0991		
6	0,0230	0,9930	0,0300		
7	0,0058	0,9988	0,0070		
8	0,0011	0,9998	0,0012		
9	0,0001	1,0000	0,0002		
10	0,0000	1,0000	0,0000		
11	0,0000	1,0000	0,0000		
12	0,0000	1,0000	0,0000		
13	0,0000	1,0000	0,0000		



k	B(n;p;k)	Summe-B(n;p;k) 0→n	Summe-B(n;p;k) n→0	n	p
0	0,0013	0,0013	1,0000	13	0,4
1	0,0113	0,0126	0,9987		
2	0,0453	0,0579	0,9874		
3	0,1107	0,1686	0,9421		
4	0,1845	0,3530	0,8314		
5	0,2214	0,5744	0,6470		
6	0,1968	0,7712	0,4256		
7	0,1312	0,9023	0,2288		
8	0,0656	0,9679	0,0977		
9	0,0243	0,9922	0,0321		
10	0,0065	0,9987	0,0078		
11	0,0012	0,9999	0,0013		
12	0,0001	1,0000	0,0001		
13	0,0000	1,0000	0,0000		

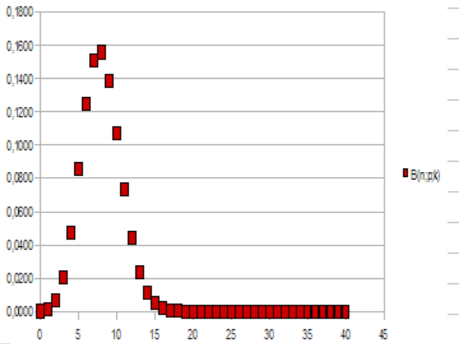


k	B(n;p;k)	Summe-B(n;p;k) 0→n	Summe-B(n;p;k) n→0	n	p
0	0,0001	0,0001	1,0000	13	0,5
1	0,0016	0,0017	0,9999		
2	0,0095	0,0112	0,9983		
3	0,0349	0,0461	0,9888		
4	0,0873	0,1334	0,9539		
5	0,1571	0,2905	0,8666		
6	0,2095	0,5000	0,7095		
7	0,2095	0,7095	0,5000		
8	0,1571	0,8666	0,2905		
9	0,0873	0,9539	0,1334		
10	0,0349	0,9888	0,0461		
11	0,0095	0,9983	0,0112		
12	0,0016	0,9999	0,0017		
13	0,0001	1,0000	0,0001		

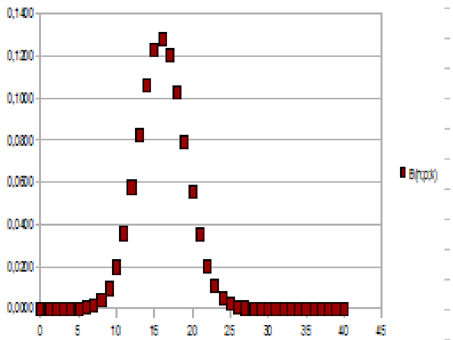


Die beiden folgenden Tabellen sind unten abgeschnitten.
Es sind dort keine wesentlichen Informationen mehr zu finden.

	A	B	C	D	E	F	G
1	k	B(n;p;k)	Summe-B(n;p;k) 0→n	Summe-B(n;p;k) n→0	n	p	
2	0	0,0001	0,0001	1,0000	40	0,2	
3	1	0,0013	0,0015	0,9999			
4	2	0,0065	0,0079	0,9985			
5	3	0,0205	0,0285	0,9921			
6	4	0,0475	0,0759	0,9715			
7	5	0,0854	0,1613	0,9241			
8	6	0,1246	0,2859	0,8387			
9	7	0,1513	0,4371	0,7141			
10	8	0,1560	0,5931	0,5629			
11	9	0,1386	0,7318	0,4069			
12	10	0,1075	0,8392	0,2682			
13	11	0,0733	0,9125	0,1608			
14	12	0,0443	0,9568	0,0875			
15	13	0,0238	0,9806	0,0432			
16	14	0,0115	0,9921	0,0194			
17	15	0,0050	0,9971	0,0079			
18	16	0,0019	0,9990	0,0029			
19	17	0,0007	0,9997	0,0010			
20	18	0,0002	0,9999	0,0003			
21	19	0,0001	1,0000	0,0001			
22	20	0,0000	1,0000	0,0000			
23	21	0,0000	1,0000	0,0000			



	A	B	C	D	E	F	G
1	k	B(n;p;k)	Summe-B(n;p;k) 0→n	Summe-B(n;p;k) n→0	n	p	
2	0	0,0000	0,0000	1,0000	40	0,4	
3	1	0,0000	0,0000	1,0000			
4	2	0,0000	0,0000	1,0000			
5	3	0,0000	0,0000	1,0000			
6	4	0,0000	0,0000	1,0000			
7	5	0,0001	0,0001	1,0000			
8	6	0,0005	0,0006	0,9999			
9	7	0,0015	0,0021	0,9994			
10	8	0,0040	0,0061	0,9979			
11	9	0,0095	0,0156	0,9939			
12	10	0,0196	0,0352	0,9844			
13	11	0,0357	0,0709	0,9648			
14	12	0,0576	0,1285	0,9291			
15	13	0,0827	0,2112	0,8715			
16	14	0,1063	0,3174	0,7888			
17	15	0,1228	0,4402	0,6826			
18	16	0,1279	0,5681	0,5598			
19	17	0,1204	0,6885	0,4319			
20	18	0,1026	0,7911	0,3115			
21	19	0,0792	0,8702	0,2089			
22	20	0,0554	0,9256	0,1298			
23	21	0,0352	0,9608	0,0744			
24	22	0,0203	0,9811	0,0392			
25	23	0,0106	0,9917	0,0189			
26	24	0,0050	0,9966	0,0083			
27	25	0,0021	0,9988	0,0034			
28	26	0,0008	0,9996	0,0012			
29	27	0,0003	0,9999	0,0004			
30	28	0,0001	1,0000	0,0001			
31	29	0,0000	1,0000	0,0000			
32	30	0,0000	1,0000	0,0000			



n↓ k→	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1			*Tabelle zur Berechnung von* $\binom{n}{k}$		
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1
7	1	7	21	35	35	21	7
8	1	8	28	56	70	56	28
9	1	9	36	84	126	126	84
10	1	10	45	120	210	252	210
11	1	11	55	165	330	462	462
12	1	12	66	220	495	792	924
13	1	13	78	286	715	1287	1716
14	1	14	91	364	1001	2002	3003
15	1	15	105	455	1365	3003	5005
16	1	16	120	560	1820	4368	8008
17	1	17	136	680	2380	6188	12376
18	1	18	153	816	3060	8568	18564
19	1	19	171	969	3876	11628	27132
20	1	20	190	1140	4845	15504	38760
21	1	21	210	1330	5985	20349	54264
22	1	22	231	1540	7315	26334	74613
23	1	23	253	1771	8855	33649	100947
24	1	24	276	2024	10626	42504	134596
25	1	25	300	2300	12650	53130	177100
26	1	26	325	2600	14950	65780	230230
27	1	27	351	2925	17550	80730	296010
28	1	28	378	3276	20475	98280	376740
29	1	29	406	3654	23751	118755	475020
30	1	30	435	4060	27405	142506	593775
31	1	31	465	4495	31465	169911	736281
32	1	32	496	4960	35960	201376	906192
33	1	33	528	5456	40920	237336	1107568
34	1	34	561	5984	46376	278256	1344904
35	1	35	595	6545	52360	324632	1623160
36	1	36	630	7140	58905	376992	1947792
37	1	37	666	7770	66045	435897	2324784
38	1	38	703	8436	73815	501942	2760681
39	1	39	741	9139	82251	575757	3262623
40	1	40	780	9880	91390	658008	3838380
41	1	41	820	10660	101270	749398	4496388
42	1	42	861	11480	111930	850668	5245786
43	1	43	903	12341	123410	962598	6096454
44	1	44	946	13244	135751	1086008	7059052
45	1	45	990	14190	148995	1221759	8145060
46	1	46	1035	15180	163185	1370754	9366819
47	1	47	1081	16215	178365	1533939	10737573
48	1	48	1128	17296	194580	1712304	12271512
49	1	49	1176	18424	211876	1906884	13983816
50	1	50	1225	19600	230300	2118760	15890700
51	1	51	1275	20825	249900	2349060	18009460
52	1	52	1326	22100	270725	2598960	20358520
53	1	53	1378	23426	292825	2869685	22957480
54	1	54	1431	24804	316251	3162510	25827165