



- 1 Ein Virus hat etwa einen Durchmesser von $10^{-7} m$, ein Sandkorn einen Durchmesser von $10^{-3} m$. Berechne, wieviele Viren man nebeneinanderlegen müsste, damit die Breite der eines Sandkorns entspricht.

Man erhält die Anzahl der Viren, wenn man die Breite des Sandkorns durch die Breite eines Virus dividiert:

$$\frac{10^{-3} m}{10^{-7} m} = 10^{-3-(-7)} = 10^{-3+7} = 10^4 = 10000 \text{ In ein Sandkorn passen also etwa 10 000 Viren nebeneinander.}$$

- 2 Vereinfache so weit wie möglich und schreibe als Potenz mit positiver Hochzahl oder als Wurzel

a) $k^5 : a^5 = \left(\frac{k}{a}\right)^5$ b) $z^3 \cdot z^{-4} = z^{3+(-4)} = z^{-1} = \frac{1}{z}$ c) $b^7 : b^7 = 1$

d) $(-(-a^4))^{-7} = (+a^4)^{-7} = a^{4 \cdot (-7)} = a^{-28} = \frac{1}{a^{28}}$

e) $\frac{(\sqrt[4]{a})^5 \cdot (\sqrt[3]{a})^4}{\sqrt[12]{a^7}} = \frac{\left(a^{\frac{1}{4}}\right)^5 \cdot \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^4}{\left(a^7\right)^{\frac{1}{12}}} = \frac{a^{\frac{1}{4} \cdot 5} \cdot a^{\frac{1}{3} \cdot 4}}{a^{\frac{7}{12}}} = \frac{a^{\frac{5}{4}} \cdot a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{7}{12}}} = \frac{a^{\frac{5}{4} + \frac{4}{3}}}{a^{\frac{7}{12}}} = \frac{a^{\frac{15}{12} + \frac{16}{12}}}{a^{\frac{7}{12}}} = \frac{a^{\frac{31}{12}}}{a^{\frac{7}{12}}} = a^{\frac{31}{12} - \frac{7}{12}} = a^{\frac{24}{12}} = a^2$

- 3 Berechne x

a) $x = \log_4 16^9 \rightarrow 4^x = 16^9 = (4^2)^9 = 4^{2 \cdot 9} = 4^{18} \rightarrow x = 18$

b) $5 = \log_x 6 \rightarrow x^5 = 6 \rightarrow x = \sqrt[5]{6} \approx 1,43$

c) $x = \log_5 \frac{1}{25} \rightarrow 5^x = \frac{1}{25} = \frac{1}{5^2} = 5^{-2} \rightarrow x = -2$

d) $7 = \log_8 x \rightarrow x = 8^7 = 2097152$

e) $3^{2x-1} = 9^{x+4} = (3^2)^{x+4} = 3^{2x+8} \rightarrow 2x-1 = 2x+8 \rightarrow -1 = 8 \rightarrow \text{keine Lösung}$

f) $\lg 5 = \lg x + 3 \cdot \lg 4 \rightarrow \lg 5 = \lg x + \lg 4^3 = \lg(x \cdot 4^3) \rightarrow 5 = x \cdot 4^3 \rightarrow x = \frac{5}{4^3} = \frac{5}{64} = 0,078125$

Viel Erfolg bei der Bearbeitung der Aufgaben!

- 4 a) Berechne, wie viel Prozent Zinsen man mindestens bekommen muss, damit aus dem Kapital 2000 € nach 6 Jahren mehr als 3000 € werden.

$$K(n) = K(0) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \quad K(n): \text{Kapital nach } n \text{ Jahren; } K(0): \text{Kapital zu Beginn; } p: \text{Zinssatz; } n: \text{Jahre}$$

Zunächst wird berechnet, wann man genau 3000 € hat:

$$3000 = 2000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^6 \rightarrow \frac{3}{2} = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^6 \rightarrow 1 + \frac{p}{100} = \sqrt[6]{\frac{3}{2}} \rightarrow \frac{p}{100} = \sqrt[6]{\frac{3}{2}} - 1 \rightarrow p = 100 \cdot \left(\sqrt[6]{\frac{3}{2}} - 1\right) \rightarrow$$

$p \approx 6,99$ Der Zinssatz muss also 7,0% betragen, wenn man 1 Stelle nach dem Komma berücksichtigt.

- b) Berechne, wie viele Jahre man mindestens warten muss, damit aus 700 € Startkapital mit 3% jährlicher Verzinsung mehr als 1000 € werden.

Bezeichnungen wie oben: $1000 = 700 \cdot 1,03^n \rightarrow \frac{10}{7} = 1,03^n \rightarrow n = \log_{1,03} \frac{10}{7} = \frac{\lg \frac{10}{7}}{\lg 1,03} \approx 12,07$

12 Jahre reichen soeben nicht aus (dann hat man knapp mehr als 998 €), man muss also 13 Jahre warten, bis man die 1000 € hat.

- 5 Den Graph der Funktion $y = \frac{1}{x+5} - 3$ kann man sich aus dem Graph von $y = \frac{1}{x}$ entstanden denken.

Was müsste man dazu mit dem Graph von $y = \frac{1}{x}$ tun?

Man muss den Graph von $y = \frac{1}{x}$ um 5 Einheiten nach links und um 3 Einheiten nach unten verschieben.

- 6 Der Graph von $y = 3x^4 - 5x^3$ soll an der y-Achse gespiegelt werden. Gib die Gleichung des gespiegelten Graphen an.

x mit $-x$ ersetzen: $y = 3 \cdot (-x)^4 - 5 \cdot (-x)^3 = 3x^4 + 5x^3$

- 7 Der Graph von $y = \log_a x + b$ läuft durch die Punkte (4/8) und (16/10). Berechne die Werte für a und b.

Man bildet ein Gleichungssystem durch Einsetzen der Punktkoordinaten in die allgemeine Gleichung:

$$\begin{cases} 8 = \log_a 4 + b \\ 10 = \log_a 16 + b \end{cases} \xrightarrow{\text{Subtrahieren}} 2 = \log_a 16 - \log_a 4 = \log_a \frac{16}{4} = \log_a 4 \rightarrow a^2 = 4 \rightarrow a = 2$$

a -Wert einsetzen: $8 = \log_2 4 + b = \log_2 2^2 + b = 2 + b \rightarrow b = 8 - 2 = 6$

Gleichung des Graphen: $y = \log_2 x + 6$

Anmerkung: Die Lösung $a = -2$ entfällt, weil die Basis beim Logarithmus nicht negativ sein darf.

8 Denke Dir ein Blatt Papier ganz um die Erde herum gelegt (das sind 40 000 km).
 Auf das Blatt zeichnest Du den Graphen der Funktion $y = \lg x$.
 Als Maßstab wählst Du 1 cm für eine Einheit.

a) Berechne, wo die Kurve die y-Achse schneidet, wenn Du einmal um die Erde herum bist.

*Nach einer Erdumrundung ist man bei $x = 4\,000\,000\,000$ (da $40\,000\text{ km} = 40\,000\,000\text{ m} = 4\,000\,000\,000\text{ cm}$)
 $y = \lg 4\,000\,000\,000 \approx 9,6$ Diese Schnittstelle passt also gut auf das Zeichenblatt!*

b) Berechne, wie oft Du um die Erde herum zeichnen musst, damit die Kurve beim y-Wert 10 ankommt.

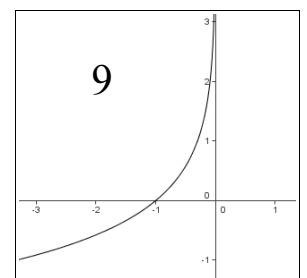
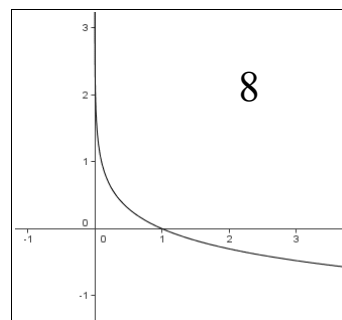
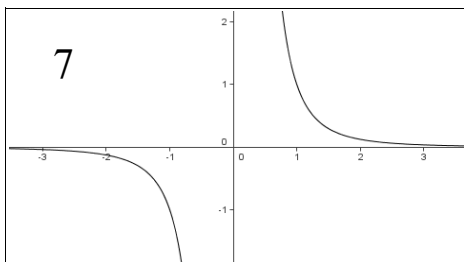
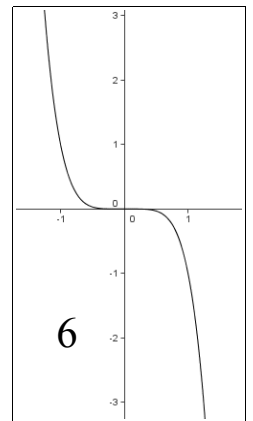
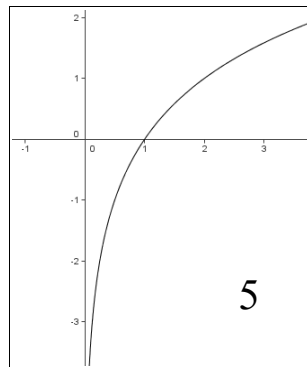
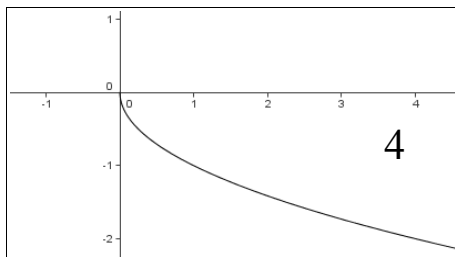
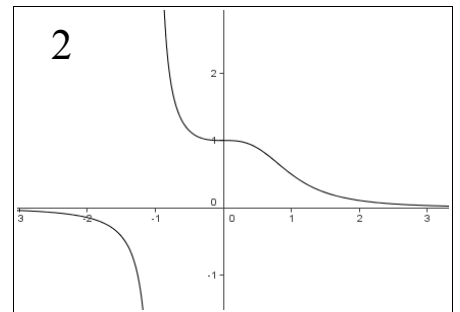
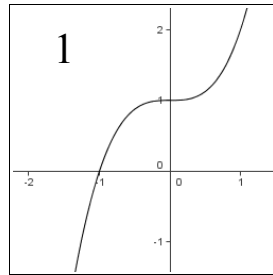
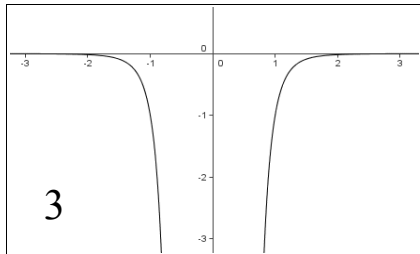
$$10 = \lg x \rightarrow x = 10^{10}$$

Man muss nun diesen Wert durch die Anzahl der Zentimeter für eine Erdumrundung dividieren:

$\frac{10^{10}}{4\,000\,000\,000} = 2,5$ Nach 2,5 Erdumrundungen ist der Funktionswert endlich bei 10 angekommen, d. h. die y-Achse wird zwischen 9,6 und 10 noch einmal nach einer Erdumrundung geschnitten.

9 Ordne die Gleichungen den Graphen zu. Nicht alle Graphen und nicht alle Gleichungen werden verwendet!

- a) $y = \frac{1}{x^3}$
- b) $y = 3x + 1$
- c) $y = \log_{\frac{1}{10}} x$
- d) $y = -x^{-6}$
- e) $y = x^3 + 1$
- f) $y = \sqrt{x^3}$
- g) $y = \log_2 x$
- h) $y = \frac{1}{x^4}$
- i) $y = -\sqrt{x}$



- a) ↔ 7
- b) -
- c) ↔ 8
- d) ↔ 3
- e) ↔ 1
- f) -
- g) ↔ 5
- h) -
- i) ↔ 4
- 2
- 6
- 9