2007-10-10 Klassenarbeit 1 Klasse 10c Mathematik

Lösung *Version 2007-10-10*

1 Ein Virus hat etwa einen Durchmesser von $10^{-7}m$, ein Sandkorn einen Durchmesser von $10^{-3}m$. Berechne, wieviele Viren man nebeneinanderlegen müsste, damit die Breite der eines Sandkorns entspricht.

Man erhält die Anzahl der Viren, wenn man die Breite des Sandkorns durch die Breite eines Virus dividiert:

$\frac{10^{-3}m}{10^{-7}m}=10^{-3-(-7)}=10^{-3+7}=10^4=10000$ *In ein Sandkorn passen also etwa 10 000 Viren nebeneinander.*

---

2 Vereinfache so weit wie möglich und schreibe als Potenz mit positiver Hochzahl oder als Wurzel

a) $k^5:a^5=\left(\frac{k}{a}\right)^5$ b) $z^3\cdot z^{-4}=z^{3+(-4)}=z^{-1}=\frac{1}{z}$ c) $b^7:b^7=1$

d) $\left(-\left(-a^4\right)\right)^{-7}=\left(+a^4\right)^{-7}=a^{4\cdot(-7)}=a^{-28}=\frac{1}{a^{28}}$

e) $\frac{\left(\sqrt[4]{a}\right)^5\cdot\left(\sqrt[3]{a}\right)^4}{\sqrt[12]{a^7}}=\frac{\left(a^{\frac{1}{4}}\right)^5\cdot\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^4}{\left(a^7\right)^{\frac{1}{12}}}=\frac{a^{\frac{1}{4}\cdot 5}\cdot a^{\frac{1}{3}\cdot 4}}{a^{7\cdot\frac{1}{12}}}=\frac{a^{\frac{5}{4}}\cdot a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{7}{12}}}=\frac{a^{\frac{5}{4}+\frac{4}{3}}}{a^{\frac{7}{12}}}=\frac{a^{\frac{15}{12}+\frac{16}{12}}}{a^{\frac{7}{12}}}=\frac{a^{\frac{31}{12}}}{a^{\frac{7}{12}}}=a^{\frac{31}{12}-\frac{7}{12}}=a^{\frac{24}{12}}=a^2$

---

3 Berechne x

a) $x=\log_4 16^9 \rightarrow 4^x=16^9=\left(4^2\right)^9=4^{2\cdot 9}=4^{18} \rightarrow x=18$

b) $5=\log_x 6 \rightarrow x^5=6 \rightarrow x=\sqrt[5]{6}\approx 1{,}43$

c) $x=\log_5\frac{1}{25} \rightarrow 5^x=\frac{1}{25}=\frac{1}{5^2}=5^{-2} \rightarrow x=-2$

d) $7=\log_8 x \rightarrow x=8^7=2097152$

e) $3^{2x-1}=9^{x+4}=\left(3^2\right)^{x+4}=3^{2x+8} \rightarrow 2x-1=2x+8 \rightarrow -1=8 \rightarrow$ keine Lösung

f) $lg\,5=lg\,x+3\cdot lg\,4 \rightarrow lg\,5=lg\,x+lg\,4^3=lg\left(x\cdot 4^3\right) \rightarrow 5=x\cdot 4^3 \rightarrow x=\frac{5}{4^3}=\frac{5}{64}=0{,}078125$

Viel Erfolg bei der Bearbeitung der Aufgaben!

4 a) Berechne, wie viel Prozent Zinsen man mindestens bekommen muss, damit aus dem Kapital 2000 € nach 6 Jahren mehr als 3000 € werden.

$K(n)=K(0)\cdot(1+\frac{p}{100})^n$ *K(n): Kapital nach 6 Jahren; K(0): Kapital zu Beginn; p: Zinssatz; n: Jahre*

Zunächst wird berechnet, wann man genau 3000 € hat:

$3000=2000\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^6 \rightarrow \frac{3}{2}=\left(1+\frac{p}{100}\right)^6 \rightarrow 1+\frac{p}{100}=\sqrt[6]{\frac{3}{2}} \rightarrow \frac{p}{100}=\sqrt[6]{\frac{3}{2}}-1 \rightarrow p=100\cdot\sqrt[6]{\frac{3}{2}}-100 \rightarrow$

$p\approx 6{,}99$ *Der Zinssatz muss also 7,0% betragen, wenn man 1 Stelle nach dem Komma berücksichtigt.*

b) Berechne, wie viele Jahre man mindestens warten muss, damit aus 700 € Startkapital mit 3% jährlicher Verzinsung mehr als 1000 € werden.

Bezeichnungen wie oben: $1000=700\cdot 1{,}03^n \rightarrow \frac{10}{7}=1{,}03^n \rightarrow n=\log_{1{,}03}\frac{10}{7}=\frac{lg\frac{10}{7}}{lg\,1{,}03}\approx 12{,}07$

12 Jahre reichen soeben nicht aus (dann hat man knapp mehr als 998 €), man muss also 13 Jahre warten, bis man die 1000 € hat.

---

5 Den Graph der Funktion $y=\frac{1}{x+5}-3$ kann man sich aus dem Graph von $y=\frac{1}{x}$ entstanden denken.

Was müsste man dazu mit dem Graph von $y=\frac{1}{x}$ tun?

Man muss den Graph von $y=\frac{1}{x}$ *um 5 Einheiten nach links und um 3 Einheiten nach unten verschieben.*

---

6 Der Graph von $y=3x^4-5x^3$ soll an der y-Achse gespiegelt werden. Gib die Gleichung des gespiegelten Graphen an.

x mit -x ersetzen: $y=3\cdot(-x)^4-5\cdot(-x)^3=3x^4+5x^3$

---

7 Der Graph von $y=\log_a x+b$ läuft durch die Punkte (4/8) und (16/10).
Berechne die Werte für a und b.

Man bildet ein Gleichungssystem durch Einsetzen der Punktkoordinaten in die allgemeine Gleichung:

$\left|\begin{array}{l} 8=\log_a 4+b \\ 10=\log_a 16+b \end{array}\right| \xrightarrow{Subtrahieren} 2=\log_a 16-\log_a 4=\log_a\frac{16}{4}=\log_a 4 \rightarrow a^2=4 \rightarrow a=2$

a-Wert einsetzen: $8=\log_2 4+b=\log_2 2^2+b=2+b \rightarrow b=8-2=6$

Gleichung des Graphen: $y=\log_2 x+6$

Anmerkung: Die Lösung $a=-2$ *entfällt, weil die Basis beim Logarithmus nicht negativ sein darf.*

---

8 Denke Dir ein Blatt Papier ganz um die Erde herum gelegt (das sind 40 000 km).
Auf das Blatt zeichnest Du den Graphen der Funktion $y=lg\,x$.
Als Maßstab wählst Du 1 cm für eine Einheit.

a) Berechne, wo die Kurve die y-Achse schneidet, wenn Du einmal um die Erde herum bist.

Nach einer Erdumrundung ist man bei x=4 000 000 000 (da 40 000km = 40 000 000m = 4 000 000 000cm)

$y=lg\,4\,000\,000\,000\approx 9{,}6$ *Diese Schnittstelle passt also gut auf das Zeichenblatt!*

b) Berechne, wie oft Du um die Erde herum zeichnen musst, damit die Kurve beim y-Wert 10 ankommt.

$10=lg\,x \;\rightarrow\; x=10^{10}$

Man muss nun diesen Wert durch die Anzahl der Zentimeter für eine Erdumrundung dividieren:

$\frac{10^{10}}{4\,000\,000\,000}=2{,}5$ *Nach 2,5 Erdumrundungen ist der Funktionswert endlich bei 10 angekommen, d. h. die y-Achse wird zwischen 9,6 und 10 noch einmal nach einer Erdumrundung geschnitten.*

---

9 Ordne die Gleichungen den Graphen zu. Nicht alle Graphen und nicht alle Gleichungen werden verwendet!

a) $y=\frac{1}{x^3}$

b) $y=3x+1$

c) $y=\log_{\frac{1}{10}} x$

d) $y=-x^{-6}$

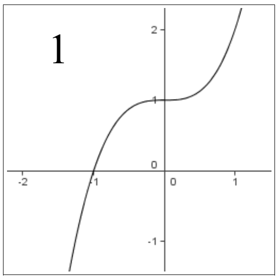
e) $y=x^3+1$

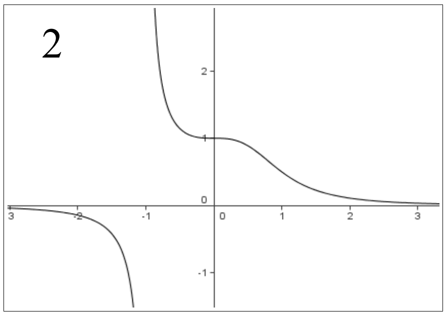
f) $y=\sqrt{x^3}$

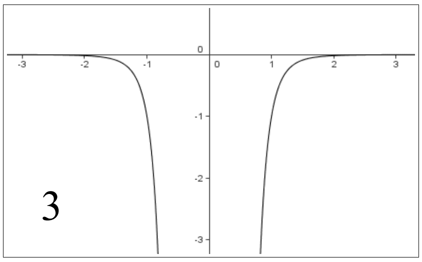
g) $y=\log_2 x$

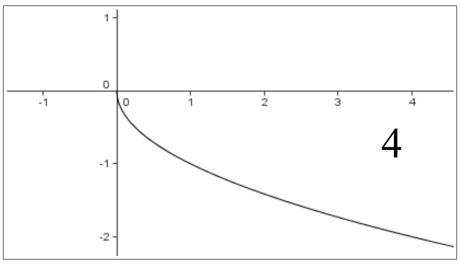
h) $y=\frac{1}{x^4}$

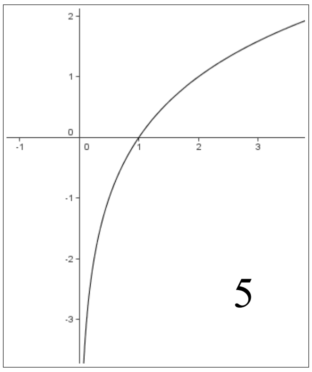
i) $y=-\sqrt{x}$

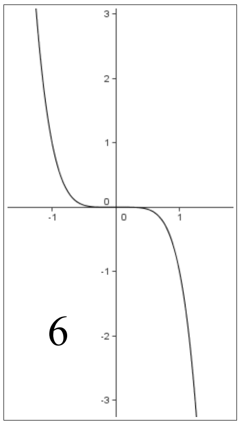


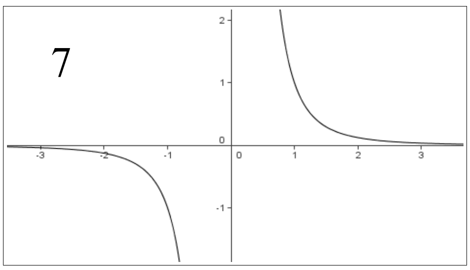


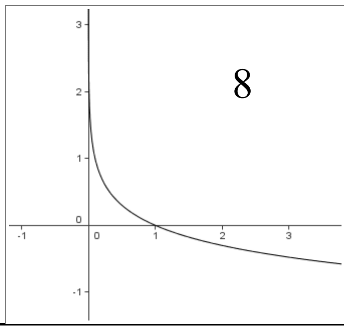


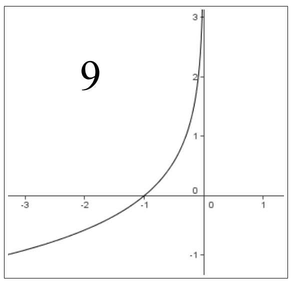












a) ↔ 7
b) -
c) ↔ 8
d) ↔ 3
e) ↔ 1
f) -
g) ↔ 5
h) -
i) ↔ 4
- 2
- 6
- 9