Lösung *Version 2007-03-28*

1 Bilden Sie die Ableitung von $f(x)=(2x+3)^2-x\cdot(5x^2+8)$.

$f(x)=4x^2+12x+9-5x^3-8x=-5x^3+4x^2+4x+9 \;\Rightarrow\; f'(x)=-15x^2+8x+4$

---

2 a) Berechnen Sie, bei welchem x-Wert die Funktion $f(x)=4x^3-2x+5$ die Steigung 1 besitzt.

$f'(x)=12x^2-2 \overset{f'(x)=1}{\Rightarrow} 12x^2-2=1 \;\Rightarrow\; 12x^2=3 \;\Rightarrow\; x^2=\frac{3}{12}=\frac{1}{4} \;\Rightarrow\; x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{1}{4}}=\pm\frac{1}{2}$

b) Berechnen Sie die Ableitungsfunktion der Funktion $f(x)=\frac{3}{x}-2\cdot\sqrt{x}+4\cdot\sin x$.

$f'(x)=3\cdot\frac{-1}{x^2}-2\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}+4\cdot\cos x=\frac{-3}{x^2}-\frac{1}{\sqrt{x}}+4\cdot\cos x$

c) Berechne Sie den Wert von a so, dass die Funktion $f(x)=a\,x^2-a^2\,x+a^3$ bei x = 6 die Steigung 20 besitzt.

$f'(x)=2a\,x-a^2 \overset{f'(6)=20}{\Rightarrow} 20=12a-a^2 \;\Rightarrow\; a^2-12a+20=0 \;\Rightarrow\; a_{1,2}=6\pm\sqrt{36-20}=6\pm\sqrt{16}=6\pm4 \;\Rightarrow$
$a_1=2 \;;\; a_2=10$

---

3 Bilden Sie die Ableitung von $f(x)=5x^2-3$ mit Hilfe des Differenzenquotienten.

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{(5x^2-3)-(5x_0^2-3)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\left(5\cdot\frac{x^2-x_0^2}{x-x_0}\right)=\lim_{x\to x_0}\left(5\cdot\frac{(x-x_0)\cdot(x+x_0)}{x-x_0}\right)=$$
$$\lim_{x\to x_0}\left(5\cdot(x+x_0)\right)=5\cdot(2\cdot x_0)=10\cdot x_0$$

oder

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(5\cdot(x_0+h)^2-3)-(5x_0^2-3)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{5\cdot x_0^2+10\cdot x_0\cdot h+5\cdot h^2-3-5\cdot x_0^2+3}{h}\right)=$$
$$\lim_{h\to 0}\left(10\cdot x_0+5\cdot h\right)=10\cdot x_0$$

4 Am Graph der Funktion $f(x)=x^2-2x$ liegt eine Tangente, die durch den Punkt $(-1/-1)$ verläuft. Berechnen Sie die Gleichung der Tangenten.

Der x-Wert des Berührpunktes von Tangente und Kurve sei x_0. Dort ist die Steigung der Kurve und gleichzeitig die Steigung der Tangente $f'(x_0)=2\cdot x_0-2$.

Von der Tangentengleichung $y_T=m\cdot x+b$ *kennt man also schon* $m=2\cdot x_0-2$.

In $y_T=(2\cdot x_0-2)\cdot x+b$ *setzt man die Koordinaten des Punktes* $(-1/-1)$ *ein:*

$-1=(2\cdot x_0-2)\cdot(-1)+b \Rightarrow b=-1+2\cdot x_0-2=2\cdot x_0-3$

Daraus ergibt sich die Tangentengleichung $y_T=(2\cdot x_0-2)\cdot x+2\cdot x_0-3$

Bei x_0 haben sowohl die Kurve als auch die Tangente denselben y-Wert $f(x_0)=x_0^2-2x_0$.

$x_0^2-2x_0=(2x_0-2)\cdot x_0+2x_0-3=2x_0^2-2x_0+2x_0-3=2x_0^2-3 \Rightarrow x_0^2-2x_0=2x_0^2-3 \Rightarrow -x_0^2-2x_0+3=0$

$\Rightarrow x_0^2+2x_0-3=0 \Rightarrow x_{0_{1,2}}=-1\pm\sqrt{1+3}=-1\pm\sqrt{4}=-1\pm 2 \Rightarrow x_{0_1}=-3\,;x_{0_2}=+1$

Es ergeben sich also die Tangentengleichungen $y_{T_1}=-8\cdot x-9$ *und* $y_{T_2}=0\cdot x-1=-1$

---

5 Berechnen Sie die Gleichung der Normalen, die bei $x_0=5$ den Graph der Funktion $f(x)=x^2-4x$ schneidet.

Funktionswert bei x_0 ist $f(5)=5^2-4\cdot 5=25-20=5$ *. Der Punkt (5/5) gehört also zur Normalen.*

Steigung der Kurve bei x_0 = 5 : $f'(x_0)=2\cdot x_0-4 \Rightarrow f'(5)=2\cdot 5-4=10-4=6$

Die Normale hat dann also bei x_0 = 5 die Steigung $-\frac{1}{6}$.

Also: $y_N=m\cdot x+b=-\frac{1}{6}\cdot x+b$ *. Einsetzen des Punktes (5/5):* $5=-\frac{1}{6}\cdot 5+b \Rightarrow b=5+\frac{5}{6}=\frac{35}{6}$

Die Normalengleichung ist also $y_N=-\frac{1}{6}\cdot x+\frac{35}{6}$.

---

6 Zeigen Sie durch Rechnung, dass die Graphen der Funktionen $f(x)=3x^2+4x$ und $g(x)=2x^2-4$ einen gemeinsamen Punkt enthalten und untersuchen Sie durch Rechnung, ob beide Graphen dort die gleiche Steigung besitzen.

Gleichsetzen der Funktionsterme:

$f(x)=g(x) \Rightarrow 3x^2+4x=2x^2-4 \Rightarrow x^2+4x+4=0 \Rightarrow x_{1,2}=-2\pm\sqrt{4-4}=-2$ *Nur <u>eine</u> Lösung.*

$f(-2)=g(-2)=3\cdot(-2)^2+4\cdot(-2)=2\cdot(-2)^2-4=4$ *Gemeinsamer Punkt:* $(-2/4)$

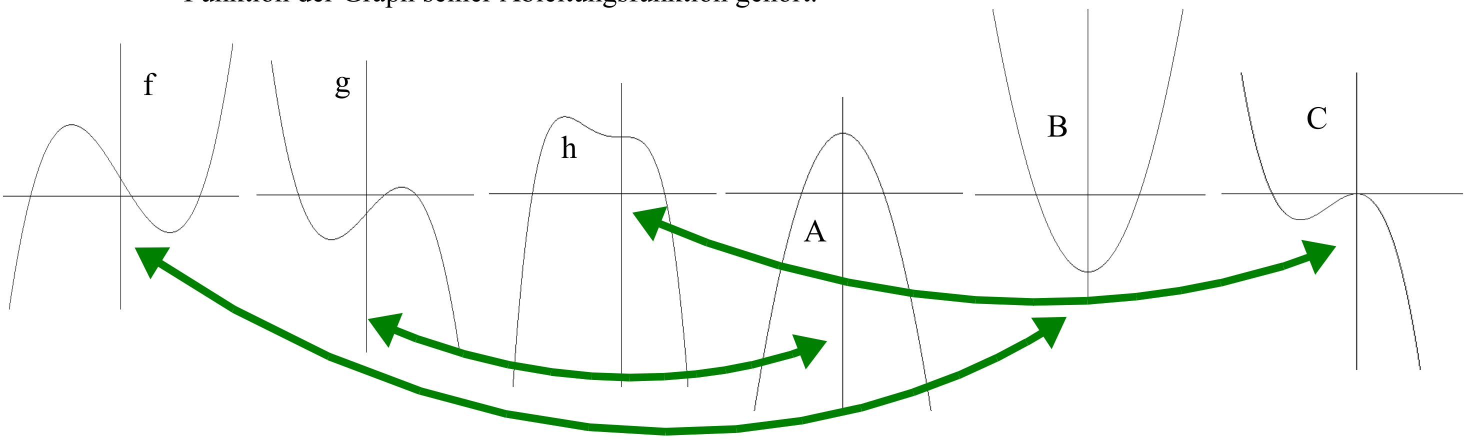
Steigungen in diesem Punkt:

$f'(x)=6x+4 \Rightarrow f'(-2)=-12+4=-8 \qquad g'(x)=4x \Rightarrow g'(-2)=-8$

Die beiden Kurven haben in ihrem Schnittpunkt dieselbe Steigung.

---

7 Ordnen Sie den Graphen der Funktionen f, g und h die Graphen A, B und C so zu, dass zu jeder Funktion der Graph seiner Ableitungsfunktion gehört.



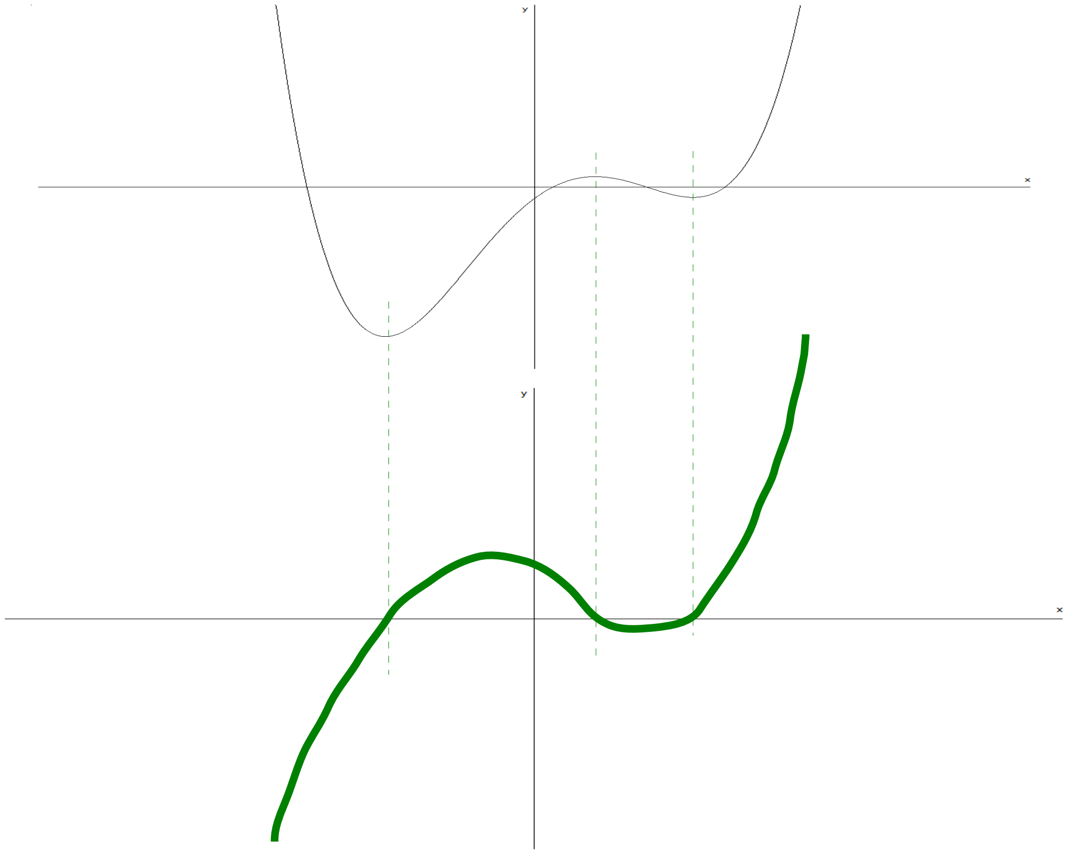
$f \leftrightarrow B$

$g \leftrightarrow A$

$h \leftrightarrow C$

Viel Erfolg bei der Bearbeitung der Aufgaben!

8 a) Zeichnen Sie zu folgendem Graph den Graph der Ableitungsfunktion



b) Gegeben ist der Graph der Ableitungsfunktion f'. Zeichnen Sie den Graph der Funktion f.