



1 Bilden Sie die Ableitung von $f(x) = (2x+3)^2 - x \cdot (5x^2+8)$.

$$f(x) = 4x^2 + 12x + 9 - 5x^3 - 8x = -5x^3 + 4x^2 + 4x + 9 \Rightarrow f'(x) = -15x^2 + 8x + 4$$

2 a) Berechnen Sie, bei welchem x-Wert die Funktion $f(x) = 4x^3 - 2x + 5$ die Steigung 1 besitzt.

$$f'(x) = 12x^2 - 2 \stackrel{f'(x)=1}{\Rightarrow} 12x^2 - 2 = 1 \Rightarrow 12x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \Rightarrow x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \pm \frac{1}{2}$$

b) Berechnen Sie die Ableitungsfunktion der Funktion $f(x) = \frac{3}{x} - 2 \cdot \sqrt{x} + 4 \cdot \sin x$.

$$f'(x) = 3 \cdot \frac{-1}{x^2} - 2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} + 4 \cdot \cos x = \frac{-3}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}} + 4 \cdot \cos x$$

c) Berechne Sie den Wert von a so, dass die Funktion $f(x) = ax^2 - a^2x + a^3$ bei $x = 6$ die Steigung 20 besitzt.

$$f'(x) = 2ax - a^2 \stackrel{f'(6)=20}{\Rightarrow} 20 = 12a - a^2 \Rightarrow a^2 - 12a + 20 = 0 \Rightarrow a_{1,2} = 6 \pm \sqrt{36 - 20} = 6 \pm \sqrt{16} = 6 \pm 4 \Rightarrow a_1 = 2 ; a_2 = 10$$

3 Bilden Sie die Ableitung von $f(x) = 5x^2 - 3$ mit Hilfe des Differenzenquotienten.

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(5x^2 - 3) - (5x_0^2 - 3)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(5 \cdot \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(5 \cdot \frac{(x - x_0) \cdot (x + x_0)}{x - x_0} \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (5 \cdot (x + x_0)) = 5 \cdot (2 \cdot x_0) = 10 \cdot x_0 \quad \text{oder}$$

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(5 \cdot (x_0 + h)^2 - 3) - (5x_0^2 - 3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{5 \cdot x_0^2 + 10 \cdot x_0 \cdot h + 5 \cdot h^2 - 3 - 5x_0^2 + 3}{h} \right) =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} (10 \cdot x_0 + 5 \cdot h) = 10 \cdot x_0$$

- 4 Am Graph der Funktion $f(x)=x^2-2x$ liegt eine Tangente, die durch den Punkt $(-1|-1)$ verläuft. Berechnen Sie die Gleichung der Tangenten.

Der x-Wert des Berührungspunktes von Tangente und Kurve sei x_0 . Dort ist die Steigung der Kurve und gleichzeitig die Steigung der Tangente $f'(x_0)=2 \cdot x_0-2$.

Von der Tangentengleichung $y_T=m \cdot x+b$ kennt man also schon $m=2 \cdot x_0-2$.

In $y_T=(2 \cdot x_0-2) \cdot x+b$ setzt man die Koordinaten des Punktes $(-1|-1)$ ein:

$$-1=(2 \cdot x_0-2) \cdot (-1)+b \Rightarrow b=-1+2 \cdot x_0-2=2 \cdot x_0-3$$

Daraus ergibt sich die Tangentengleichung $y_T=(2 \cdot x_0-2) \cdot x+2 \cdot x_0-3$

Bei x_0 haben sowohl die Kurve als auch die Tangente denselben y-Wert $f(x_0)=x_0^2-2x_0$.

$$\begin{aligned} x_0^2-2x_0 &= (2x_0-2) \cdot x_0+2x_0-3=2x_0^2-2x_0+2x_0-3=2x_0^2-3 \Rightarrow x_0^2-2x_0=2x_0^2-3 \Rightarrow -x_0^2-2x_0+3=0 \\ &\Rightarrow x_0^2+2x_0-3=0 \Rightarrow x_{0,1,2}=-1 \pm \sqrt{1+3}=-1 \pm \sqrt{4}=-1 \pm 2 \Rightarrow x_{0_1}=-3; x_{0_2}=+1 \end{aligned}$$

Es ergeben sich also die Tangentengleichungen $y_{T_1}=-8 \cdot x-9$ und $y_{T_2}=0 \cdot x-1=-1$

- 5 Berechnen Sie die Gleichung der Normalen, die bei $x_0=5$ den Graph der Funktion $f(x)=x^2-4x$ schneidet.

Funktionswert bei x_0 ist $f(5)=5^2-4 \cdot 5=25-20=5$. Der Punkt $(5/5)$ gehört also zur Normalen.

Steigung der Kurve bei $x_0=5$: $f'(x_0)=2 \cdot x_0-4 \Rightarrow f'(5)=2 \cdot 5-4=10-4=6$

Die Normale hat dann also bei $x_0=5$ die Steigung $-\frac{1}{6}$.

Also: $y_N=m \cdot x+b=-\frac{1}{6} \cdot x+b$. Einsetzen des Punktes $(5/5)$: $5=-\frac{1}{6} \cdot 5+b \Rightarrow b=5+\frac{5}{6}=\frac{35}{6}$

Die Normalengleichung ist also $y_N=-\frac{1}{6} \cdot x+\frac{35}{6}$.

- 6 Zeigen Sie durch Rechnung, dass die Graphen der Funktionen $f(x)=3x^2+4x$ und $g(x)=2x^2-4$ einen gemeinsamen Punkt enthalten und untersuchen Sie durch Rechnung, ob beide Graphen dort die gleiche Steigung besitzen.

Gleichsetzen der Funktionsterme:

$$f(x)=g(x) \Rightarrow 3x^2+4x=2x^2-4 \Rightarrow x^2+4x+4=0 \Rightarrow x_{1,2}=-2 \pm \sqrt{4-4}=-2 \text{ Nur eine Lösung.}$$

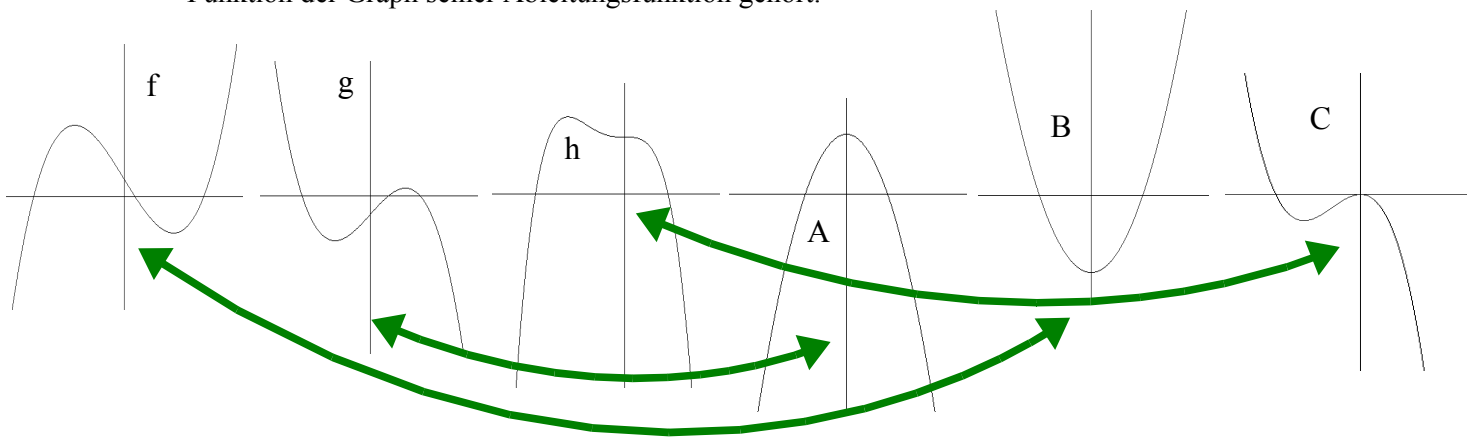
$$f(-2)=g(-2)=3 \cdot (-2)^2+4 \cdot (-2)=2 \cdot (-2)^2-4=4 \text{ Gemeinsamer Punkt: } (-2|4)$$

Steigungen in diesem Punkt:

$$f'(x)=6x+4 \Rightarrow f'(-2)=-12+4=-8 \quad g'(x)=4x \Rightarrow g'(-2)=-8$$

Die beiden Kurven haben in ihrem Schnittpunkt dieselbe Steigung.

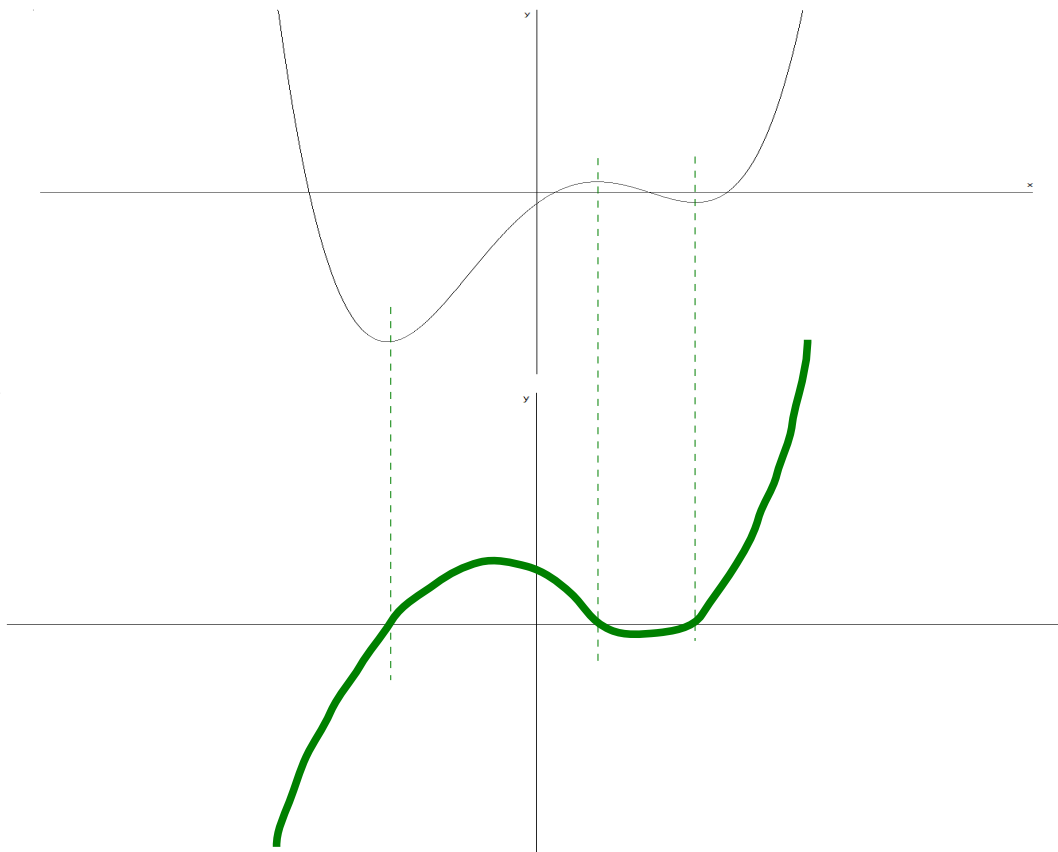
- 7 Ordnen Sie den Graphen der Funktionen f , g und h die Graphen A, B und C so zu, dass zu jeder Funktion der Graph seiner Ableitungsfunktion gehört.



$f \leftrightarrow B$
 $g \leftrightarrow A$
 $h \leftrightarrow C$

Viel Erfolg bei der Bearbeitung
der Aufgaben!

8 a) Zeichnen Sie zu folgendem Graph den Graph der Ableitungsfunktion



b) Gegeben ist der Graph der Ableitungsfunktion f' . Zeichnen Sie den Graph der Funktion f .

