2006-12-15 Klausur 2 Klasse 11a Mathematik

Lösung *Version 2007-01-03*

1 Geben Sie jeweils eine explizite und eine implizite Darstellung folgender Folgen an:

a) 5 ; 12 ; 19 ; 26 ; 33 ; ...

explizit: $a_n = 7 \cdot (n-1) + 5$ *implizit:* $a_1 = 5 \;;\; a_n = a_{n-1} + 7$

b) 2 ; -6 ; +18 ; -54 ; +162 ; ...

explizit: $a_n = 2 \cdot (-3)^{(n-1)}$ *implizit:* $a_1 = 2 \;;\; a_n = a_{n-1} \cdot (-3)$

c) 17 ; 17 ; 17 ; 17 ; ...

explizit: $a_n = 17$ *implizit:* $a_1 = 17 \;;\; a_n = a_{n-1}$

---

2 Bestimmen Sie die Grenzwerte folgender Folgen:

a) $a_n = \frac{5n^3 - 1}{n^3}$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n^3-1}{n^3} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5 - \frac{1}{n^3}}{1} = 5$

b) $b_n = 7 + \frac{2}{n} - \frac{4}{n^2}$ $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(7 + \frac{2}{n} - \frac{4}{n^2}\right) = 7$

c) $c_n = \frac{1+n}{5+n^2}$ $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+n}{5+n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}+1}{\frac{5}{n}+n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

---

3 Erfinden Sie eine Folge mit dem Grenzwert 4,7 .

Einfachstes Beispiel: $a_n = 4{,}7$

oder nicht ganz so trivial: $a_n = 4{,}7 + \frac{1}{n}$

oder komplizierter: $a_n = \frac{47 \cdot n + 123}{10 \cdot n - 75}$

---

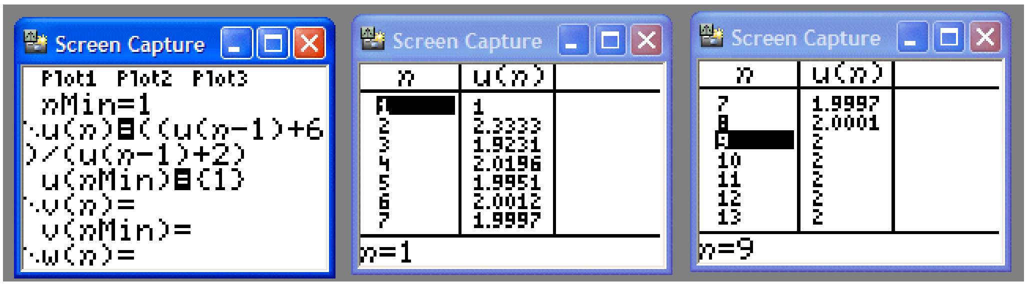
4 Berechnen Sie, wie viele Folgenglieder der Folge $a_n = \frac{a_{n-1}+6}{a_{n-1}+2}$ mit $a_1 = 1$ man addieren muss, damit die Summe größer als 20 wird.
Berechnen Sie auch den Grenzwert der Folge.

Der Taschenrechner liefert mit der Eingabe $nMin = 1 \;;\; u(n) = (u(n-1)+6)/(u(n-1)+2) \;;\; u(nMin) = 1$ *eine Tabelle mit folgenden Zahlenwerten*

Ab n=9 wird nur noch der Wert 2 angezeigt.

Summiert man die ersten 10 Folgenglieder, so ergibt sich 19,2721.
Mit dem 11. Folgenglied wird mit dem Summenwert 21,2721 der Wert 20 übersprungen.

Man muss also die ersten 11 Folgenglieder summieren.



Aus der Tabelle kann man ablesen, dass der Grenzwert der Folge 2 beträgt.

Der Grenzwert lässt sich aber auch berechnen: Da sich für große n aufeinander folgende Folgenglieder fast nicht mehr unterscheiden, macht man den Ansatz $a_n = a_{n-1}$ *und erhält als Lösung der Gleichung den Grenzwert:*

$$a_n = \frac{a_n + 6}{a_n + 2} \;\Rightarrow\; a_n^2 + 2a_n = a_n + 6 \;\Rightarrow\; a_n^2 + a_n - 6 = 0 \;\Rightarrow\; a_{n_{1,2}} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$$

Daraus folgt: $a_{n_1} = 2 \;\; ; a_{n_2} = -3$

Durch die Wahl $a_1 = 1$ *wird bei der gegebenen Folge aber nur der Grenzwert 2 realisiert.*

---

5 Addiert man alle unendlich vielen Folgenglieder einer geometrischen Folge, so erhält man 42.
Geben Sie solch eine geometrische Folge an.

Setzt man in der Summenformel das Ergebnis gleich 42, so erhält man $s = \frac{a_1}{1-q} = 42$.

Diese Gleichung ist wahr, wenn man z. B. $q = \frac{1}{2}$ *und* $a_1 = 21$ *wählt.*

Eine mögliche geometrische Folge ist also $a_n = 21 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

---

6 Ein Ball (Flummy) hüpft nach dem senkrechten Fallen so vom Boden wieder auf, dass er $\frac{9}{10}$ seiner vorherigen Höhe wieder erreicht. Zu Beginn wurde der Ball aus einer Höhe von 1 m fallen gelassen.

a) Berechne sie, wie viele Aufpraller er macht, bevor seine erreichte Höhe weniger als 1 cm beträgt.

Nach dem 1. Aufprall erreicht der Ball die Höhe $1\,m \cdot \frac{9}{10} = 0{,}9\,m$.

Nach dem 2. Aufprall erreicht der Ball die Höhe $0{,}9\,\frac{m \cdot 9}{10} = 0{,}9^2\,m$.

Die erreichte Höhe kann also nach dem n-ten Aufprall durch die geometrische Folge $a_n = \left(\frac{9}{10}\right)^n$

beschrieben werden. Setzt man $a_n = \frac{1}{100}$ *, so erhält man* $\left(\frac{9}{10}\right)^n = \frac{1}{100} \Rightarrow n = \log_{\frac{9}{10}} \frac{1}{100} = \frac{lg\frac{1}{100}}{lg\frac{9}{10}} \approx 43{,}7$

Nach dem 44. Aufprall ist also die Sprunghöhe von 1 cm unterschritten.

b) Berechnen Sie, welche Strecke der Ball insgesamt bei dem senkrechten Fallen und Wiederaufsteigen zurücklegt, bis er vollständig zur Ruhe gekommen ist.

Die Summierung der zurückgelegten Wegstrecken (in m) ergibt $1 + \frac{9}{10} + \frac{9}{10} + \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \ldots$

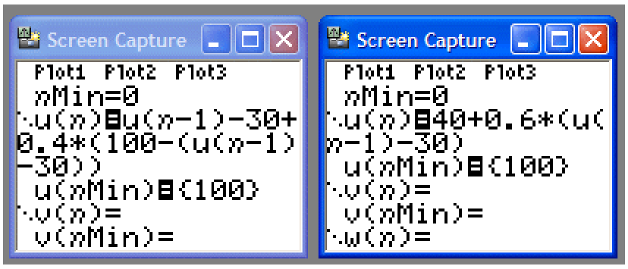
Bis auf einen Summanden 1 ist das das Doppelte der unendlichen Summe der Folgenglieder der geometrischen Folge $a_n = \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}$ *. Mit* $a_1 = 1$ *und* $q = \frac{9}{10}$ *gilt* $s_n = \frac{1}{1 - \frac{9}{10}} = 10$.

Der zurückgelegte Weg beträgt wegen $2 \cdot s_n - 1 = 2 \cdot 10 - 1 = 19$ *also 19 m.*

---

7 Ein Getränkemarkt erhält nach Einführung einer neuen Limonadensorte 100 Kisten dieser Limonade. Da so viel Kisten nicht verkauft werden können, werden bei jeder wöchentlichen Lieferung 40% der an 100 fehlenden Kisten ersetzt. Die Verkäufer stellen fest, dass jede Woche 30 Kisten verkauft werden.

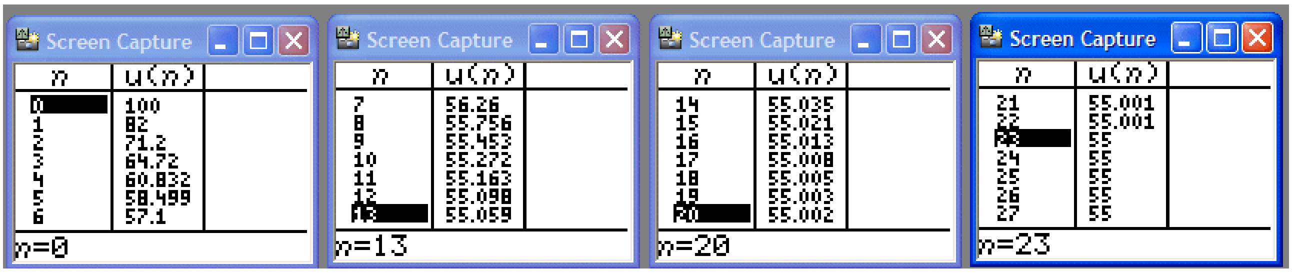
a) Berechnen Sie, auf welche Kistenmenge sich auf lange Sicht der Bestand an Limonadenkisten einspielen wird (gemessen jeweils nach Lieferung der neuen Kisten).



Jedes Mal werden 30 Kisten vom Bestand abgezogen und 40% von (100 - neuer Bestand) werden hinzugefügt. Als Formel für den TI-84:

nMin = 0
u(n) = u(n-1) - 30 + 0.4(100 - (u(n-1) - 30))*
oder einfacher
u(n) = 40 + 0.6(u(n-1) - 30)*
u(nMin) = 100

Die Tabelle zeigt, dass ab n=23 nur noch der Wert 55 angezeigt wird. Also wird sich der Bestand (jeweils nach einer Lieferung) auf 55 Kisten einspielen. (Unter realistischen Bedingungen, d. h. es werden keine Kistenteile geliefert, ergeben sich 56 Kisten.)



Man kann auch ohne Taschenrechner das Ergebnis finden: Ein konstanter Wert ergibt sich, wenn die Anzahl der ersetzten Kisten ($0{,}4 \cdot (100 - (a_{n-1} - 30))$ *) gleich der Anzahl verkauften Kisten (30) ist.*

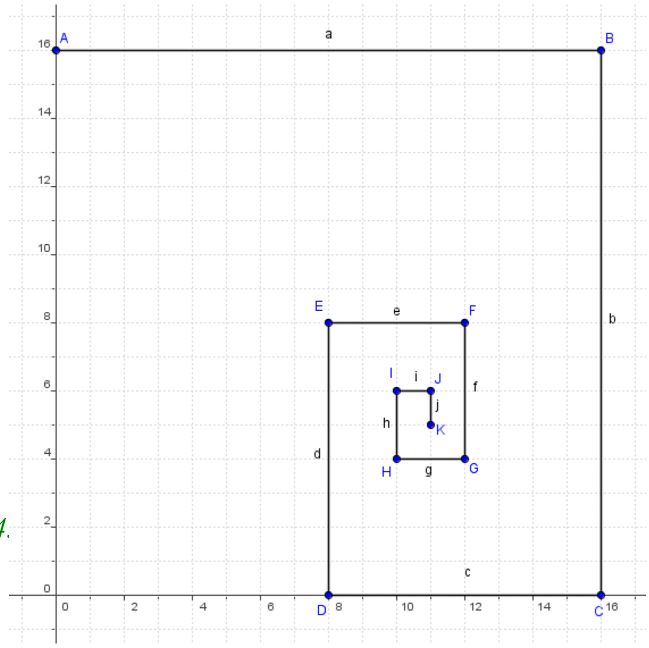
$0{,}4 \cdot (100 - (a_{n-1} - 30)) = 30 \Rightarrow 40 - 0{,}4 \cdot a_{n-1} + 12 = 30 \Rightarrow 22 = 0{,}4 \cdot a_{n-1} \Rightarrow a_{n-1} = 55$

b) Es sollen niemals weniger als 30 Kisten im Getränkemarkt vorhanden sein. Ist das gewährleistet?

Das ist <u>nicht</u> gewährleistet: Wenn nach langer Zeit die neue Lieferung gekommen ist, sind 55 Kisten in der Verkaufsstelle. Da 30 Kisten bis zur nächsten Lieferung verkauft werden, sind kurz vor der nächstan Lieferung nur 25 Kisten vorrätig, also 5 Kisten zu wenig.

---

8 a) Berechnen Sie die Länge der abgebildeten (nach innen hin unendlich weit fortgesetzten) Spirale.



Die Seitenlängen ergeben von außen nach innen die Folge 16 ; 8 ; 4 ; 2 ; 1 ; ...

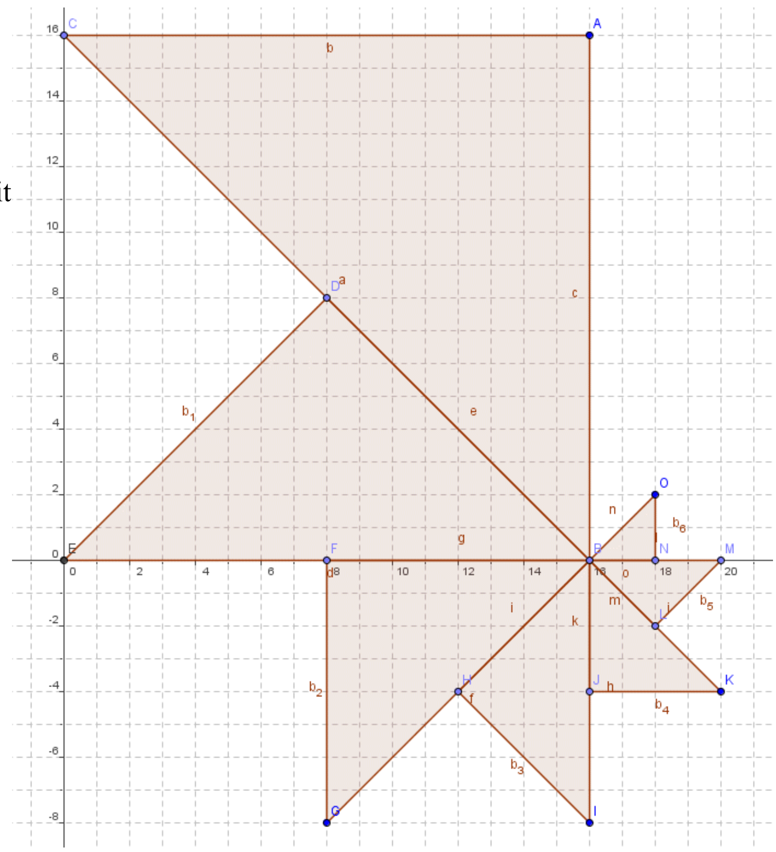
Daraus ergibt sich die unendliche Summe

$$s=16+16+8+8+4+4+2+2+1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots=$$

$$2\cdot(16+8+4+\ldots)=2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}16\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=2\cdot\frac{16}{1-\frac{1}{2}}=2\cdot 32=64$$

Die Länge der unendlich gewickelten Spirale beträgt also 64.

b) Berechnen Sie die von allen unendlich vielen Dreiecken überdeckte Fläche.
Es sind nur 7 Dreiecke gezeichnet worden. Die weiteren (immer kleiner werdenden) Dreiecke überlappen sich mit den schon vorhandenen Dreiecken.
Bei Überlappung sollen die überdeckten Flächen mit berechnet werden.



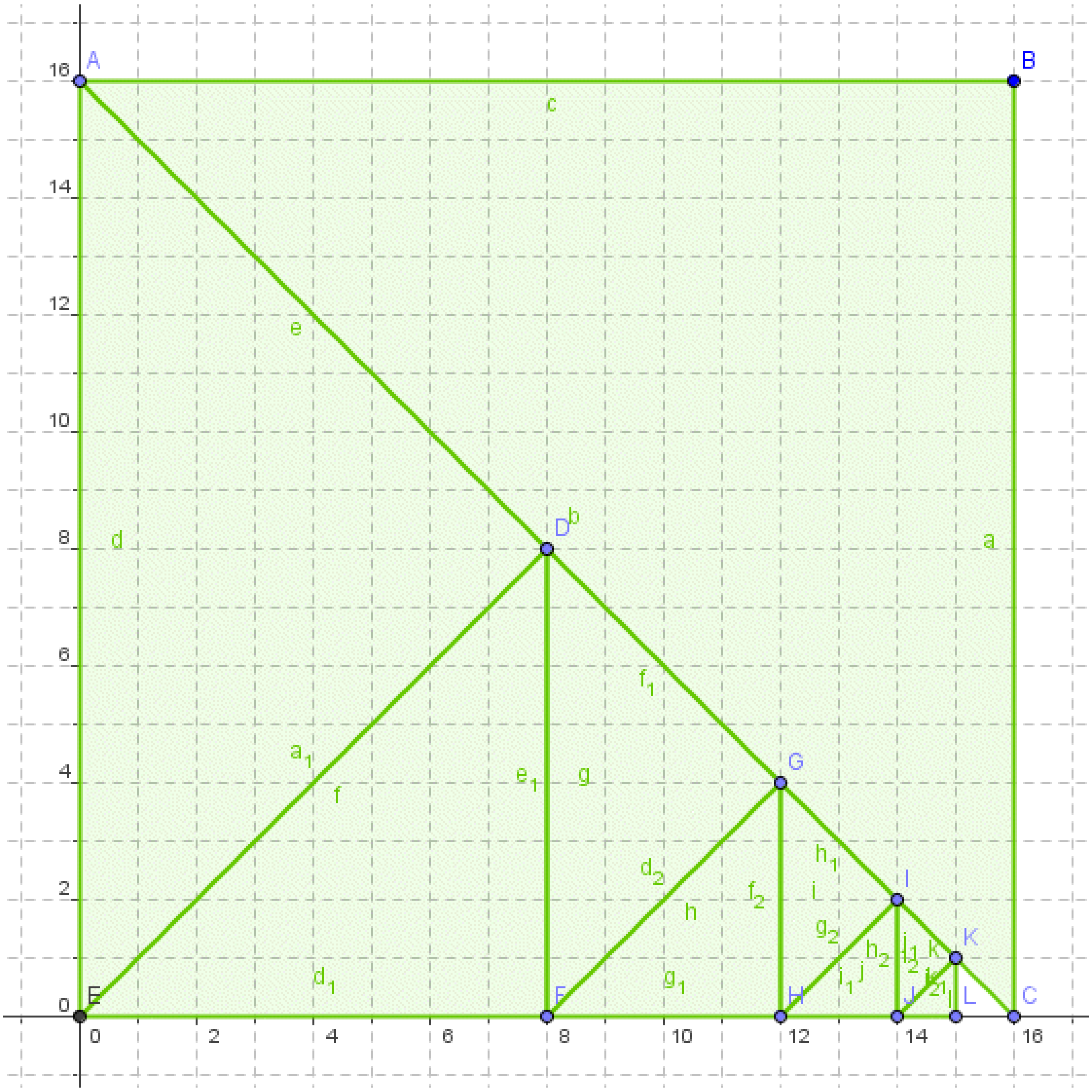
Mit der Flächenformel $A_{Dreieck}=\frac{1}{2}\cdot g\cdot h$ *für Dreiecke ergeben sich folgende Flächeninhalte: 128 ; 64 ; 32 ; 16 ; 8 ; ...*

Gleichung der Folge: $a_n=128\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{(n-1)}$

Also Summe der Flächeninhalte folgt daraus:

$$s=\frac{128}{1-\frac{1}{2}}=256$$

Dieses Ergebnis ergibt sich anschaulich, wenn man die Dreiecke folgendermaßen anordnet (siehe Abbildung auf der nächsten Seite)



Viel Erfolg beim Bearbeiten der Aufgaben!