2006-10-11 Klassenarbeit 1 Klasse 11a Mathematik

Lösung

1 Geben Sie die Gleichungen der Geraden an, von denen folgende Eigenschaften bekannt sind:

a) Der y-Achsenabschnitt ist -3 und die Steigung hat den Wert -5.

$$y=-5x-3$$

b) Die Gerade verläuft durch den Punkt (3/7) und hat die Steigung $\frac{1}{2}$.

$$y=\frac{1}{2}\cdot x+b \overset{(3/7)\,einsetzen}{\Rightarrow} 7=\frac{1}{2}\cdot 3+b \Rightarrow b=7-\frac{3}{2}=\frac{14}{2}-\frac{3}{2}=\frac{11}{2} \Rightarrow y=\frac{1}{2}\cdot x+\frac{11}{2}$$

c) Die Gerade enthält die Punkte (-1/3) und (4/-6).

$$m=\frac{-6-3}{4-(-1)}=\frac{-9}{5} \Rightarrow y=-\frac{9}{5}\cdot x+b \overset{(-1/3)\,einsetzen}{\Rightarrow} 3=\frac{9}{5}+b \Rightarrow b=3-\frac{9}{5}=\frac{15}{5}-\frac{9}{5}=\frac{6}{5} \Rightarrow y=-\frac{9}{5}\cdot x+\frac{6}{5}$$

---

2 Eine Parabel hat den Scheitelpunkt bei (3/8) und enthält den Punkt (9/-10). Berechnen Sie die Funktionsgleichung der Parabel und berechnen Sie anschließend, wo diese Parabel die x-Achse schneidet. (Falls Sie die Parabelgleichung nicht ermitteln können, berechnen Sie die Schnittpunkte mit der x-Achse mit Hilfe der Gleichung $y=-\frac{1}{3}x^2+5x+\frac{4}{3}$).

Parabelgleichung:

$$y=a\cdot(x-b)^2+c \overset{Scheitel\ bei(3/8)}{\Rightarrow} y=a\cdot(x-3)^2+8 \overset{(9/-10)\,einsetzen}{\Rightarrow} -10=a\cdot(9-3)^2+8=36a+8 \Rightarrow$$

$$36a=-18 \Rightarrow a=-\frac{18}{36}=-\frac{1}{2} \Rightarrow y=-\frac{1}{2}\cdot(x-3)^2+8$$

Nullstellen:

$$0=-\frac{1}{2}\cdot(x-3)^2+8=-\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{9}{2}+8=-\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{7}{2} \overset{\cdot(-2)}{\Rightarrow} x^2-6x-7=0 \Rightarrow$$

$$x_{1,2}=3\pm\sqrt{9+7}=3\pm\sqrt{16}=3\pm 4 \Rightarrow x_1=7;\ x_2=-1$$

Berechnung mit Ersatzgleichung:

$$y=-\frac{1}{3}x^2+5x+\frac{4}{3} \Rightarrow 0=-\frac{1}{3}x^2+5x+\frac{4}{3} \overset{\cdot(-3)}{\Rightarrow} x^2-15x-4=0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{15}{2}\pm\sqrt{\frac{225}{4}+4}=\frac{15}{2}\pm\sqrt{\frac{241}{4}}$$

---

3 Zur Geraden mit der Gleichung $y=m\cdot x+7$ gehört eine Normale, die die x-Achse bei 4 und die y-Achse bei -12 schneidet. Berechnen Sie den m-Wert in der Geradengleichung.

Aus den Schnittpunkten der Normalen mit den beiden Koordinatenachsen ergibt sich ein Steigungsdreieck für die Normale: $m_{Normale}=\frac{12}{4}=3$ *. Steigung der Geraden:* $m_{Gerade}=-\frac{1}{m_{Normale}}=-\frac{1}{3}$.

Die gesuchte Geradengleichung ist deshalb $y=-\frac{1}{3}\cdot x+7$.

4 Ein Kreis hat seinen Mittelpunkt im Punkt (0/0) und besitzt den Radius 10. Die Lage einer ganz bestimmten Radius-Strecke wird durch die Funktionsgleichung $f(x)=\frac{3}{4}\cdot x$ gegeben.
Stellen Sie die Gleichung des Kreises auf und zeigen Sie, dass die gegebene Radius-Strecke bei (-8/-6) den Kreis berührt.
In diesem Punkt soll eine Tangente an den Kreis gelegt werden. Berechnen Sie die Tangentengleichung.

Gleichung eines Kreises mit Mittelpunkt in (0/0)*:* $x^2+y^2=r^2$ *, also hier* $x^2+y^2=100$.

Einsetzen des Punktes (-8/-6) *in die Kreisgleichung:* 64 + 36 = 100. *Die Gleichung stimmt, also liegt der Punkt* (-8/-6) *auf der Kreislinie.*

Zu zeigen ist weiter, dass die Punkte (0/0) *und* (-8/-6) *auf dem Funktionsgraph liegen:*

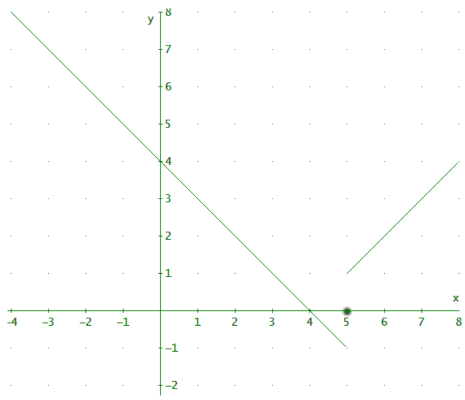
$$f(0)=\frac{3}{4}\cdot 0=0 \;\; ; \;\; f(-8)=\frac{3}{4}\cdot(-8)=-\frac{24}{4}=-6$$

Im Punkt (-8/-6) *soll nun die Tangente an den Kreis gelegt werden. Die dazugehörende Normale (Radius) hat die Steigung* $m_{Radius}=\frac{-6}{-8}=\frac{3}{4}$ *. Daraus folgt* $m_{Tangente}=-\frac{1}{m_{Radius}}=-\frac{4}{3} \Rightarrow y_{Tangente}=-\frac{4}{3}\cdot x+b$

$$\overset{(-8/-6)einsetzen}{\Rightarrow} \quad -6=-\frac{4}{3}\cdot(-8)+b \Rightarrow b=-6-\frac{32}{3}=-\frac{50}{3} \Rightarrow y_{Tangente}=-\frac{4}{3}\cdot x-\frac{50}{3}$$

---

5 Stellen Sie die Funktion mit der Gleichung $f(x)=sgn(x-5)+|x-5|$ abschnittsweise dar und skizzieren Sie den Kurvenverlauf.

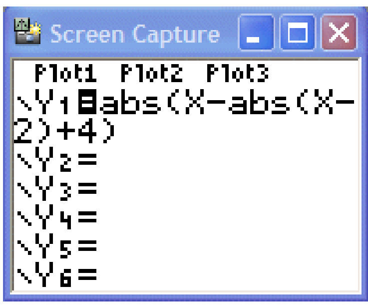


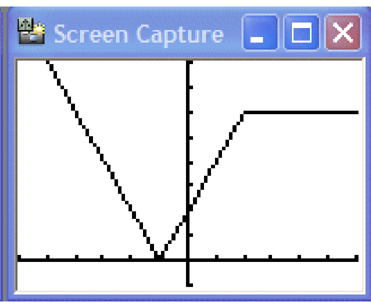
$$f(x)=sgn(x-5)+|x-5|=\begin{Bmatrix} +1+x-5= & x-4 & falls\ x>5 \\ 0+x-5=x-5= & -5 & falls\ x=0 \\ -1-(x-5)= & -x+4 & falls\ x<5 \end{Bmatrix}$$

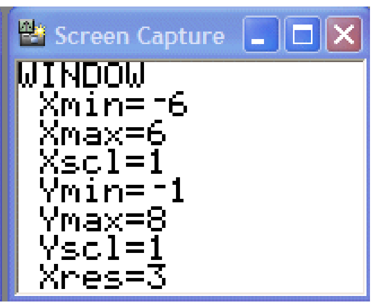
---

6 Geben Sie die Funktionsgleichung $f(x)=|x-|x-2|+4|$ mit Hilfe einer Fallunterscheidung ohne Beträge an, lassen Sie den GTR den Graph zeichen, skizzieren Sie das Taschenrechnerbild auf dem Klausurbogen und gegeben Sie an, welche Werte Sie für Xmin, Xmax, Ymin und Ymax im Menü WINDOW eingestellt haben.

$$f(x)=|x-|x-2|+4|=\begin{Bmatrix} |x-(x-2)+4|= & 6 & falls\ x\geq 2 \\ |x+(x-2)+4|= & |2x+2| & falls\ x<2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 6 & falls\ x\geq 2 \\ 2x+2 & falls\ x<2\ und\ x\geq -1 \\ -2x-2 & falls\ x<-1 \end{Bmatrix}$$



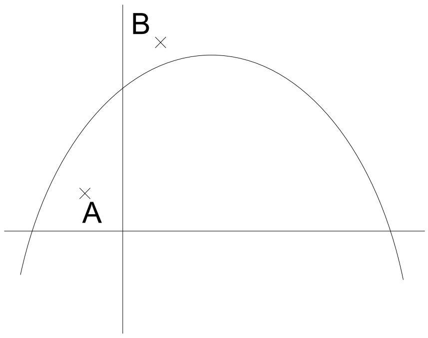


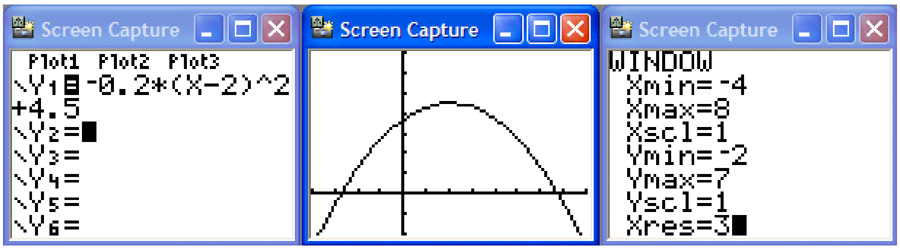


7 Finden Sie mit Hilfe des GTR Funktionsgleichungen, deren Graphen in allen wichtigen Eigenschaften (Art des Graphen, Lage der gegebenen Punkte, angegebene Koordinaten) zu den abgebildeten Graphen passen. Achtung: Die Zeichnungen sind nicht maßstabsgerecht!

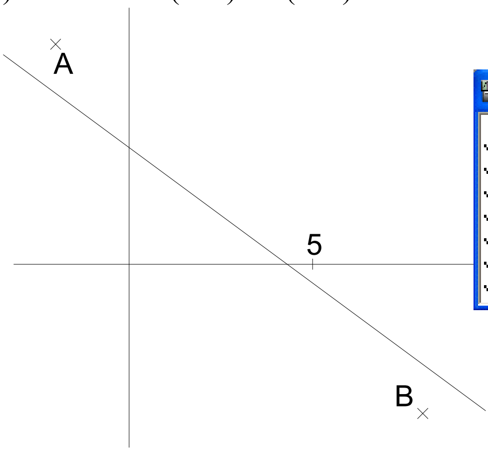
Es wird immer nur eine Lösung von unendlich vielen richtigen Lösungen angegeben.

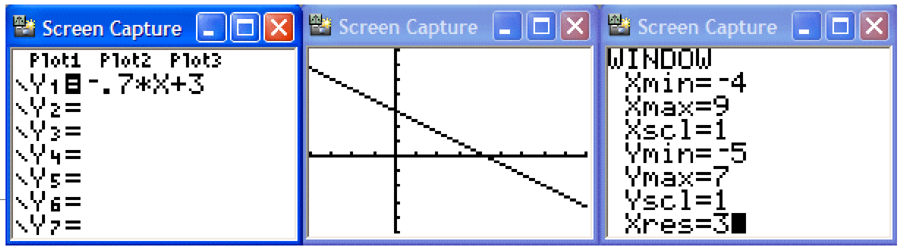
a) Parabel A(-1/1) B(1/5)



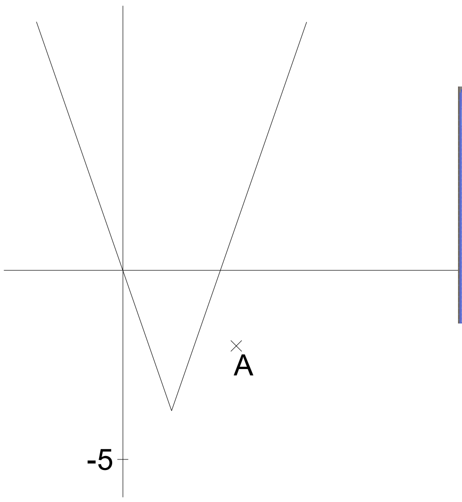


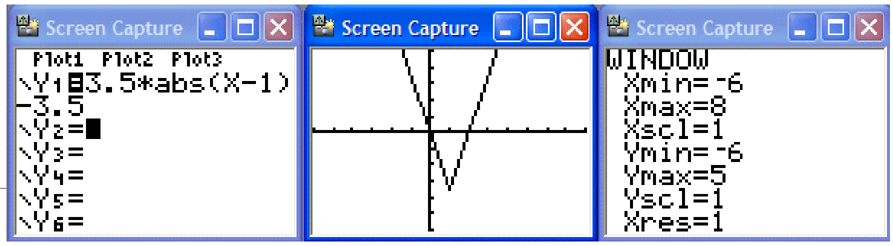
b) Gerade A(-2/6) B(8/-4)



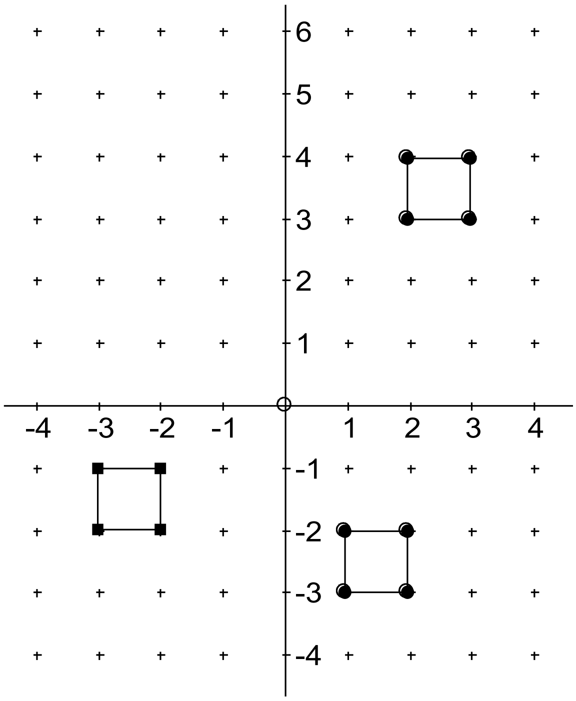


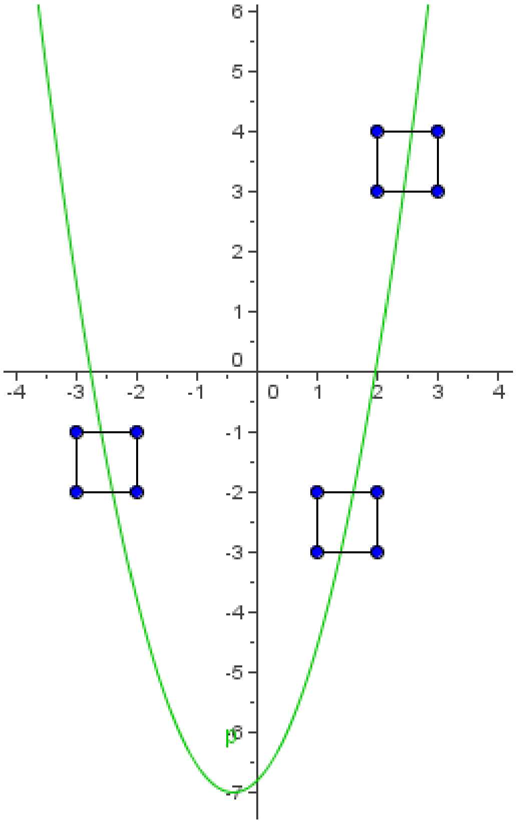
c) Betragsfunktion A(3/-2)





d) Finden Sie die Gleichung einer Parabel, deren Graph durch die eingezeichneten Quadrate verläuft.





Die Parabel mit der Gleichung $y=\frac{5}{4}\cdot\left(x+\frac{2}{5}\right)^2-7$ *ist eine von unendlich vielen möglichen Lösungen.*

---

8 Ein Wasserspeicher und das dazugehörende Zuführungsrohr werden durch konstanten Wasserzulauf gefüllt.
Welcher der Graphen passt zu diesem Vorgang?
Antwort mit Begründung!

Zuerst steigt das Wasser langsam, weil der Speicher unten eine große Querschnittsfläche besitzt. Dann steigt das Wasser schnell und gleichmäßig, da das Rohr in jeder Höhe die gleiche Querschnittsfläche hat.

Die richtige Lösung ist also b)