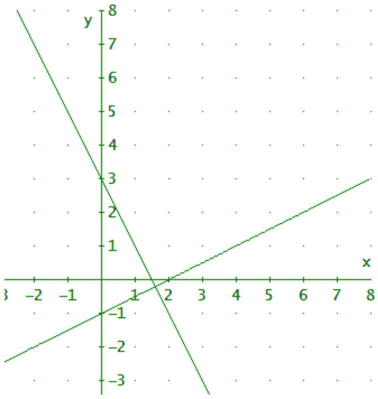
2006-10-11 Klassenarbeit 1 Klasse 9c Mathematik

Lösung *Version 2006-10-24*

1 Löse graphisch (näherungsweise) folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} y &= -2x+3 \\ y &= \frac{1}{2}x-1 \end{aligned} \; .$$



Aus der graphischen Darstellung kann man ablesen, dass die beiden Geraden sich etwa bei (1,6/-0,2) schneiden.

Das sind auch die exakten Werte, wie man leicht durch Rechnung nachprüfen kann.

---

2 Löse rechnerisch folgende Gleichungssysteme und gib jeweils an, wie viele Lösungen existieren.

a) $\begin{aligned} 2x+y &= 1 \\ 5x+2y &= 5 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} 4x+2y &= 2 \\ 5x+2y &= 5 \end{aligned} \overset{(2)-(1)}{\Rightarrow} x=3 \overset{\text{in}(1)}{\Rightarrow} 6+y=1 \Rightarrow y=-5 \Rightarrow L=\{(3/-5)\}$

Es existiert genau 1 Lösung

b) $\begin{aligned} 6x-8y &= 4 \\ -9x+12y &= 8 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} 3x-4y &= 2 \\ -3x+4y &= \frac{8}{3} \end{aligned} \overset{(1)+(2)}{\Rightarrow} 0=\frac{14}{3} \Rightarrow L=\{\ \}$

Es existiert keine Lösung

c) $\begin{aligned} 3x+2y-3z &= 0 \\ x-2y+z &= 4 \end{aligned}$

Das Gleichungssystem ist unterbestimmt. Eine Variable kann frei vorgegeben werden, z. B. z = a.

$\begin{aligned} 3x+2y-3a &= 0 \\ x-2y+a &= 4 \end{aligned} \overset{(1)+(2)}{\Rightarrow} 4x-2a=4 \Rightarrow 4\text{x}=2a+4 \Rightarrow x=\frac{1}{2}\cdot a+1 \overset{\text{in}(2)}{\Rightarrow}$

$\left(\frac{1}{2}\cdot a+1\right)-2y+a=4 \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot a+1+a-4=2y \Rightarrow 2\text{y}=\frac{3}{2}\cdot a-3 \Rightarrow y=\frac{3}{4}\cdot a-\frac{3}{2}$

$L=\left\{\left(\frac{1}{2}\cdot a+1/\frac{3}{4}\cdot a-\frac{3}{2}/a\right)\right\}$ *Es existieren unendlich viele Lösungen.*

d)

$\begin{aligned} x+2y-z &= 5 \\ 2x+y+z &= 4 \\ 2x-y+2z &= 0 \end{aligned} \overset{(1)+(2);\,2\cdot(1)+(3)}{\Rightarrow} \begin{aligned} 3x+3y &= 9 \\ 4x+3y &= 10 \end{aligned} \overset{(5)-(4)}{\Rightarrow} x=1 \overset{\text{in}(4)}{\Rightarrow} 3+3y=9 \Rightarrow 3y=6 \Rightarrow y=2$

$\overset{\text{in}(2)}{\Rightarrow} 2+2+z=4 \Rightarrow z=0 \Rightarrow L=\{(1/2/0)\}$ *Es existiert genau 1 Lösung*

---

3 Die 3 Neffen Tick, Trick und Track sollen Onkel Dagobert über ihre Ersparnisse Bericht erstatten. Da sie sehr unterschiedlich gespart haben, verkleiden Sie ihre Ausführungen in ein Rätsel.
Tick sagt: „Wenn mir Trick die Hälfte und Track ein Viertel ihrer Ersparnisse geben, dann habe ich 70 Taler“.
Trick sagt: „Wenn mir Track die Hälfte und Tick ein Viertel ihrer Ersparnisse geben, dann habe ich 140 Taler“.
Track sagt: „Wenn mir Tick die Hälfte und Trick ein Viertel ihrer Ersparnisse geben, dann habe ich 210 Taler“.
Berechne, wie viel jeder Neffe gespart hat.

Ersparnisse der 3 Neffen: Tick : x Taler, Trick : y Taler, Track : z Taler
Es ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x+\frac{1}{2}\cdot y+\frac{1}{4}\cdot z &= 70 \\ \frac{1}{4}\cdot x+y+\frac{1}{2}\cdot z &= 140 \\ \frac{1}{2}\cdot x+\frac{1}{4}\cdot y+z &= 210 \end{aligned} \overset{\text{alle Gleichungen}\cdot 4}{\Rightarrow} \begin{aligned} 4x+2y+z &= 280 \\ x+4y+2z &= 560 \\ 2x+y+4z &= 840 \end{aligned} \overset{2\cdot(1)-(2);2\cdot(2)-(3)}{\Rightarrow} \begin{aligned} 7x &= 0 \\ 7y &= 280 \end{aligned} \Rightarrow$$

$$x=0;\, y=40 \overset{\text{in}(1)}{\Rightarrow} 0+80+z=280 \Rightarrow z=200$$

Tick hat also nichts gespart, Trick 40 Taler und Track sogar 200 Taler.

Einige haben die Worte „...dann habe ich“ so verstanden, dass der Betrag genannt ist, der von den beiden anderen Neffen stammt. Damit ergibt sich folgende Lösung:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\cdot y+\frac{1}{4}\cdot z &= 70 \\ \frac{1}{4}\cdot x+\frac{1}{2}\cdot z &= 140 \\ \frac{1}{2}\cdot x+\frac{1}{4}\cdot y &= 210 \end{aligned} \overset{\text{alle Gleichungen}\cdot 4}{\Rightarrow} \begin{aligned} 2y+z &= 280 \\ x+2z &= 560 \\ 2x+y &= 840 \end{aligned} \overset{2\cdot(1)-(2);4\cdot(3)}{\Rightarrow} \begin{aligned} -x+4y &= 0 \\ 8x+4y &= 3360 \end{aligned} \overset{(5)-(4)}{\Rightarrow}$$

$$9x=3360 \Rightarrow x=\frac{1120}{3} \overset{\text{in}(4)}{\Rightarrow} -\frac{1120}{3}+4y=0 \Rightarrow y=\frac{1120}{12}=\frac{280}{3} \overset{\text{in}(1)}{\Rightarrow} \frac{2\cdot 280}{3}+z=280 \Rightarrow z=\frac{280}{3}$$

---

4 Beschreibe kurz, wann man bei einem Gleichungssystem zweckmäßiger Weise das Einsetzungsverfahren und wann das Gleichsetzungsverfahren anwendet.
Erfinde als Beispiel für jedes dieser beiden Verfahren ein Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 2 Unbekannten. Du sollst nur die Gleichungssysteme aufstellen, diese aber <u>nicht</u> lösen!

Einsetzungsverfahren:
Eine Gleichung ist so gegeben, dass eine Variable isoliert auf der einen Seite des Gleichheitszeichens steht. Der Term auf der anderen Seite kann dann statt der Variablen in der anderen Gleichung verwendet werden.

Beispiel: $\begin{aligned} 2x+4y &= 15 \\ y &= 7-4x \end{aligned} \Rightarrow 2x+4\cdot(7-4x)=15$

Gleichsetzungsverfahren:

Sind die Gleichungen so gegeben, dass jeweils auf einer Seite der Gleichungen derselbe Term steht, können die anderen Seiten der Gleichungen gleichgesetzt werden. Fällt dabei eine Variable weg, so wird man diesen Lösungsweg wählen. *Beispiel:* $\begin{aligned} 156x &= 5-4y \\ 156x &= 3y+6 \end{aligned} \Rightarrow 5-4y=3y+6$