Lösung

> Bei den mit dem graphikfähigen Taschenrechner (GTR) gelösten Aufgaben ist eine Dokumentation aller Schritte notwendig.
> Die Darstellung muss so ausführlich sein, dass ein normal begabter Leser alle Schritte der Lösung selbst nachvollziehen kann.

1 Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x)=x^3-6x^2-15x+46$.

a) Zeigen Sie durch Auflösen der Klammern, dass die Funktionsgleichung auch als $f(x)=(x-2)\cdot(x^2-4x-23)$ geschrieben werden kann.

$f(x)=(x-2)\cdot(x^2-4x-23)=x^3-4x^2-23x-2x^2+8x+46=x^3-6x^2-15x+46=f(x)$

b) Berechnen Sie die exakten x-Werte für vorhandene Nullstellen, Extrema, Wendepunkte und Sattelpunkte. Berechnen Sie auch die Art der Extrema und das Krümmungsverhalten bei den Wendepunkten.

$f'(x)=3x^2-12x-15$; $f''(x)=6x-12$; $f'''(x)=6$

Nullstellen: $f(x)=0 \Rightarrow (x-2)\cdot(x^2-4x-23)=0 \Rightarrow x_1=2\,;\, x_{2,3}=2\pm\sqrt{4+23}=2\pm\sqrt{27}$

waagrechte Tangenten: $f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-12x-15=0 \Rightarrow x^2-4x-5=0 \Rightarrow$
$x_{1,2}=2\pm\sqrt{4+5}=2\pm\sqrt{9}=2\pm3 \Rightarrow x_1=5$; $x_2=-1$
$f''(5)=30-12=18>0 \Rightarrow$ *Minimum* ; $f''(-1)=-6-12=-18<0 \Rightarrow$ *Maximum*

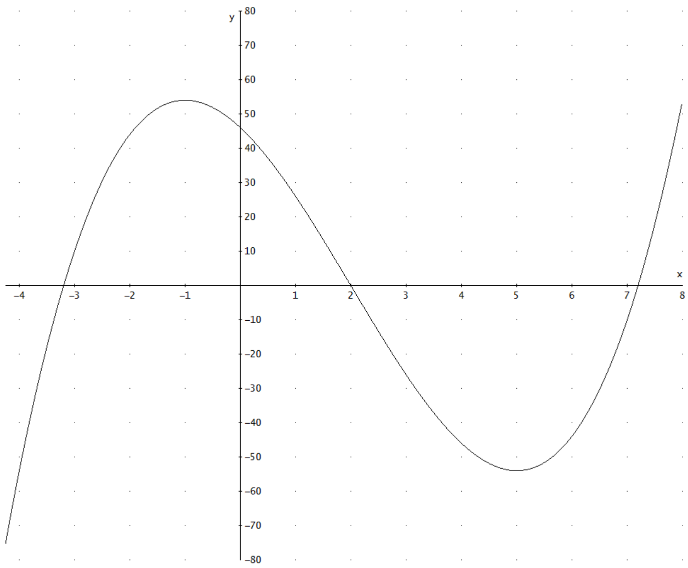
Wendepunkte: $f''(x)=0 \Rightarrow 6x-12=0 \Rightarrow x=2$; $f'''(2)=6>0 \Rightarrow$ *rechts nach links*

c) Nehmen Sie mit Begründung Stellung zum Symmetrieverhalten des Graphen. Auf eine Rechnung kann (muss aber nicht) verzichtet werden.

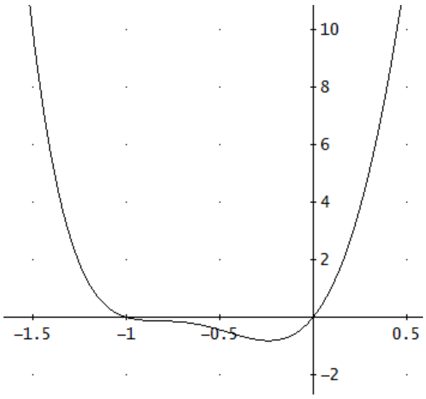
Graphen vom Grad 3 sind immer punktsymmetrisch zum Wendepunkt. Hier liegt also Punktsymmetrie zum Punkt (2/0) vor (Nullstelle und Wendepunkt gleichzeitig).

Rechnung: Wegen $f(x)\stackrel{!}{=}-f(-x+2u)+2v$ *gilt mit* $u=2$ *und* $v=0$ *:*
$-f(-x+4)+0=-\left((-x+4)^3-6(-x+4)^2-15(-x+4)+46\right)=$
$-\left(-x^3+12x^2-48x+64-6x^2+48x-96+15x-60+46\right)=x^3-6x^2-15x+46=f(x)$

d) Zeichnen Sie den Graph. Wählen Sie dazu geeignete (verschiedene) Maßstäbe auf den beiden Achsen.



2 Rechts sehen Sie einen Ausschnitt aus dem Graphen der Funktion mit der Gleichung $f(x)=-6x^5-2x^4+20x^3+24x^2+8x$



a) Begründen Sie, dass der Graph noch nicht alle wichtigen Stellen des vollständigen Kurvenverlaufs zeigt.

Da die Funktion vom Grad 5 (ungerade) ist, müssen die Funktionswerte für $x\to\infty$ oder $x\to-\infty$ gegen $-\infty$ gehen. Es gibt also wenigstens noch ein Maximum.

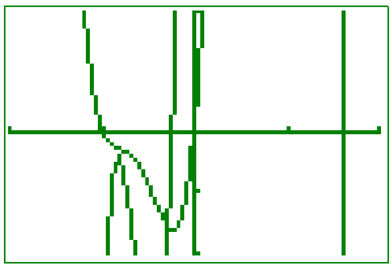
b) Finden Sie mit Hilfe des GTR so viel Eigenschaften wie möglich über Nullstellen, Extrema, Sattelpunkte und Wendepunkte heraus.

Nullstellen: Mit CALC / 2:zero findet man 3 Nullstellen:
$x_1=-1$; $x_2=0$; $x_3=2{,}1747651$

Extrema: Mit CALC / 4:maximum findet man das lokale Maximum bei (1,6277396/80,264998)
Mit CALC / 3:minimum findet man das lokale Minimum bei (-0,2373027/-0,8160095)

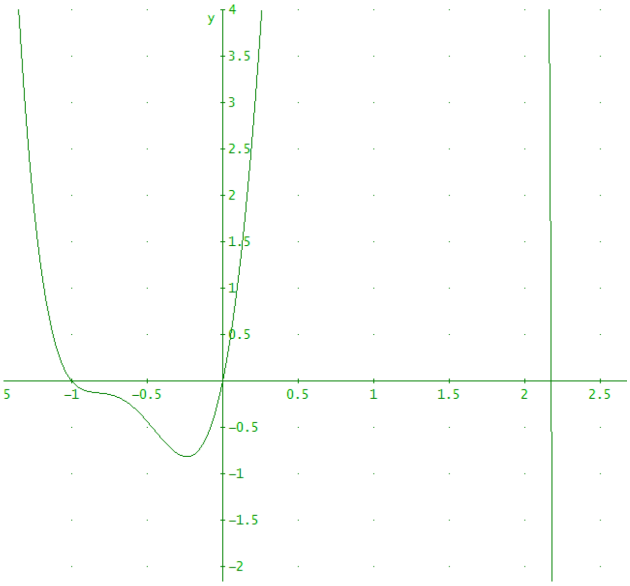
Wendepunkte: Man untersucht die Ableitung von f(x) auf Extrema. Besitzt f '(x) ein Maximum, hat f(x) einen Wendepunkt (links nach rechts), bei einem Minimum von f '(x) hat f(x) einen Wendepunkt (rechts nach links).
Ergebnisse: Wendepunkte links nach rechts bei x=1,0755458 und x=-0,8244496.
Wendepunkt von rechts nach links bei x=-0,4510933
Man sieht am Graphen von f '(x), dass er nur Nullstellen (f '(x)=0) besitzt, die nicht gleichzeitig Extremstelle (es müsste f ''(x)=0 sein) sind. Ein Sattelpunkt existiert also nicht.

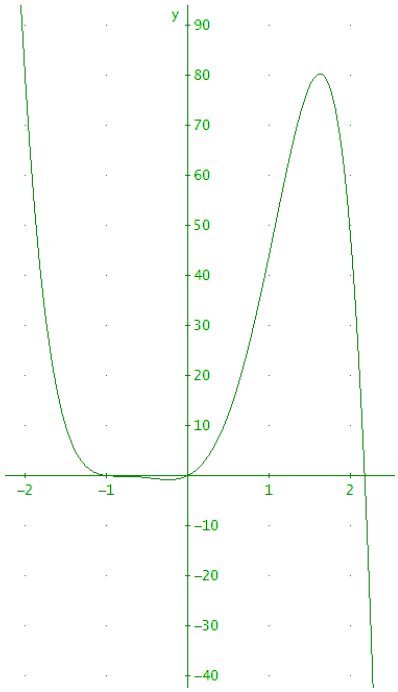
Gehen Sie besonders auf die Frage ein, ob in der Nähe von $x=-1$ ein Sattelpunkt vorhanden ist.



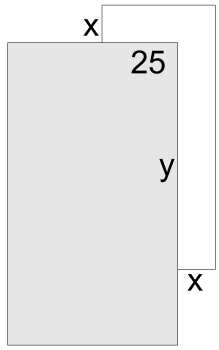
Wird mit der Funktion auch ihre 1. Ableitung mit Y2=nDerive(Y1(X),X,X) gezeichnet, so erkennt man, dass die 1. Ableitung im Bereich nahe -1 keine Nullstelle sondern nur negative Werte besitzt. Die Steigung ist in diesem Bereich also durchgehend negativ. Es kann dort also keinen Sattelpunkt (Steigung=0) geben.

c) Skizzieren Sie den Graphen, nicht maßstabsgetreu, aber so, dass man die Ergebnisse der einzelnen Untersuchungspunkte gut erkennen kann.





3 An eine Scheune (grau) soll um eine Ecke herum ein Hühnerauslauf angelegt werden. Die Breite x des Auslaufs soll überall gleich groß sein.
An der Stirnseite der Scheune soll der Zaun im Abstand von 25m beginnen, an der Längsseite der Scheune ist das Ende des Auslaufs y von der Ecke entfernt.
Die gesamte Zaunlänge (an der Scheunenwand ist natürlich kein Zaun notwendig) beträgt 60m.
Berechnen Sie, wie x gewählt werden muss, damit die Fläche des Auslaufs maximal groß wird.



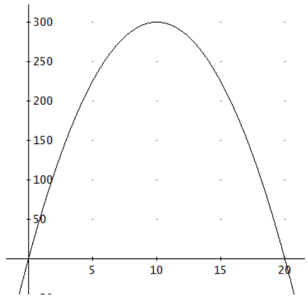
Die Länge des Zauns ergibt sich (oben links beginnend) aus x+25+x+x+y+x=4x+y+25=60.

Daraus folgt $y=60-25-4x=35-4x$

Teilt man die Fläche in kleinere Teilstücke auf, erkennt man, dass sich die Zielfunktion zusammensetzt aus $A(x,y)=25x+x^2+xy$

Einsetzen der Nebenbedingung $y=35-4x$ *führt zu einer Funktion mit nur einer Variablen:*

$A(x)=25x+x^2+x\cdot(35-4x)=25x+x^2+35x-4x^2=-3x^2+60x$



Bestimmung des Kurven-Maximums:

$A'(x)=-6x+60\overset{!}{=}0 \quad \Rightarrow \quad x=10$

$A''(x)=-6<0$ *für alle x, also Maximum*

$y=35-4x=35-4\cdot 10=35-40=-5$

Da es keine negativen Streckenlängen gibt, liegt das gefundene Maximum nicht im Bereich erlaubter x-Werte. Es gibt hier also ein Randmaximum.

Die Ränder des Bereiches werden definiert durch x=0 und y=0.

Aus x=0 folgt y=35 und aus y=0 folgt $x=\frac{35}{4}$.

Da für x=0 gilt $A(0)=0$ *muss das Maximum für y=0 angenommen werden:*

$$A\left(\frac{35}{4}\right)=25\cdot\frac{35}{4}+\left(\frac{35}{4}\right)^2+0=\frac{875}{4}+\frac{1225}{16}=\frac{3500+1225}{16}=\frac{4775}{16}\approx 298{,}44$$

Der Hühnerauslauf ist also knapp $300\,m^2$ *groß.*

---

4 Beim Abstoß vom Tor würde ein Fußball im luftleeren Raum eine Parabelbahn beschreiben. Auf Grund des Luftwiderstandes kann die Flugbahn aber eher durch eine ganzrationale Gleichung 3. Grades angenähert werden.

Folgendes ist über eine speziell ausgemessene Bahn bekannt:

- Beim Abstoß trifft der Torwart den Ball in einer Höhe von 0,5m über dem Boden.
- Die Abflug-Richtung hat eine Steigung von 0,8.
- Nach 40m Flug (gemessen in waagrechter Richtung) hat der Ball seine maximale Höhe von 25m erreicht.

a) Legen Sie ein geeignetes Koordinatensystem fest.

Den Nullpunkt legt man zweckmäßig auf den Rasen, direkt unter den abstoßenden Schuh des Torwarts. Die x-Achse verläuft auf dem Rasen unter der Flugbahn des Balls. Die y-Achse geht senkrecht nach oben.

b) Bestimmen Sie die Gleichung einer ganzrationalen Funktion 3. Grades, die die Flugbahn des Balls auf Grund der gegebenen Informationen bestimmt.

Die Funktionsgleichung hat die Form $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \Rightarrow f'(x)=3ax^2+2bx+c$

Aus den Bedingungen ergeben sich folgende Gleichungen:

$f(0)=0{,}5 \;;\; f'(0)=0{,}8 \;;\; f(40)=25 \;;\; f'(40)=0$

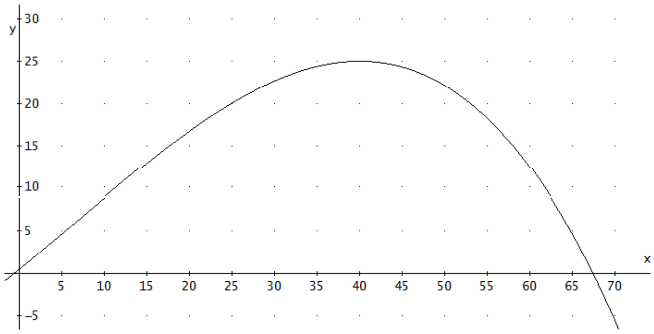
Daraus ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\left\{\begin{array}{ccc} d & = & 0{,}5 \\ c & = & 0{,}8 \\ 64000a+1600b+40c+d & = & 25 \\ 4800a+80b+c & = & 0 \end{array}\right\} \text{ mit der Matrix } [A]=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0{,}8 \\ 64000 & 1600 & 40 & 1 & 25 \\ 4800 & 80 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Der GTR berechnet aus rref([A]) die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2{,}65625\text{E-4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0{,}0059375 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0{,}8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0{,}5 \end{pmatrix}$

Daraus ergibt sich die Funktionsgleichung

$f(x)=-0{,}000265625x^3+0{,}0059375x^2+0{,}8x+0{,}5$

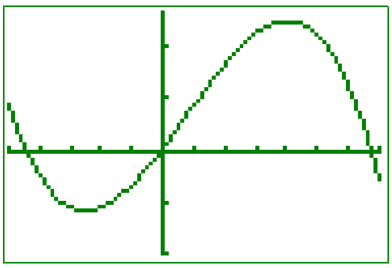


c) Berechnen Sie wie weit vom Torwart entfernt und mit welcher Steigung der Ball wieder auf dem Boden auftrifft.

Mit der Option CALC / 2:zero berechnet der Taschenrechner eine Nullstelle der Funktion bei x=67,431189.
Der Ball trifft also nach etwa 67 m wieder auf die Erde auf.

Es gilt $f'(x)=-0{,}000796875x^2+0{,}011875x+0{,}8$.
Für x=67,431189 berechnet der GTR $f'(67{,}431189)=-2.022617564$.
Die Steigung der Flugbahn beträgt also beim Auftreffen etwa -2.

d) Spricht etwas dagegen, dass die gefundene Funktion tatsächlich die exakte Flugbahn beschreibt? Antwort mit Begründung.



Aus dem rechts abgebildeten Graph kann man entnehmen, dass der Wendepunkt der Kurve im positiven x-Bereich liegt. Die Steigung der Ball-Flugkurve müsste also nach dem Abschlag zuerst noch zunehmen und dann erst abnehmen. Das ist nicht realistisch. Die gefundene Funktionsgleichung kann also nur eine grobe Näherung sein.