Lösung

1 Lösen Sie mit Hilfe der Polynomdivision: $(3x^3-x^2-11x+2):(x-2)=3x^2+5x-1$

$$\begin{array}{l}
\underline{3x^3-6x^2}\\
\quad 5x^2-11x+2\\
\quad \underline{5x^2-10x}\\
\qquad\quad -x+2\\
\qquad\quad \underline{-x+2}\\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

---

2 Ermitteln Sie mit Hilfe des Newtonverfahrens $x\leftarrow x-\frac{f(x)}{f'(x)}$ die Lösung der Gleichung $x-\cos(x)=0$ (x im Bogenmaß, d. h. Taschenrechner auf RAD einstellen!).

$f(x)=x-\cos(x) \;\Rightarrow\; f'(x)=1+\sin(x) \;\Rightarrow$

$$x\leftarrow x-\frac{x-\cos(x)}{1+\sin(x)}=\frac{x+x\cdot\sin(x)}{1+\sin(x)}-\frac{x-\cos(x)}{1+\sin(x)}=\frac{x\cdot\sin(x)+\cos(x)}{1+\sin(x)}$$

Mit dem Startwert 0 ergeben sich folgende Näherungen:

1. *Näherung: 0*
2. *Näherung: 1*
3. *Näherung: 0,7503638678*
4. *Näherung: 0,7391128909*
5. *Näherung: 0,7390851334*
6. *Näherung: 0,7390851332*
7. *Näherung: 0,7390851332*

Dieser Wert ändert sich nicht mehr. x=0,739 ist also (gerundet) eine Lösung der gegebenen Gleichung.

---

3 a) Zeigen Sie rechnerisch, dass folgende Funktionen nicht differenzierbar sind:

$$f(x)=\begin{Bmatrix} x^2+2x,\ \textit{für } x\le 3\\ 8x-10,\ \textit{für } x>3\end{Bmatrix} \qquad g(x)=\begin{Bmatrix} x^2+2x,\ \textit{für } x\le 3\\ 9x-12,\ \textit{für } x>3\end{Bmatrix}$$

Wenn die Funktionen nicht differenzierbar sein sollen, ist zu zeigen, dass die Graphen bei x=3 entweder eine Sprungstelle oder einen Knick besitzen.

$f(3)=3^2+2\cdot 3=15$ *Setzt man 3 in den Term* $8x-10$ *ein, so ergibt sich* 14. *Also liegt bei x=3 eine Sprungstelle vor und f(x) ist nicht differenzierbar.*

$g'(x)=\begin{Bmatrix} 2x+2,\ \textit{für } x\le 3\\ 9\quad ,\ \textit{für } x>3\end{Bmatrix} \;\Rightarrow\; g'(3)=2\cdot 3+2=8$ *Für x>3 gilt aber g'(x)=9. Also liegt bei x=3 ein Knick vor und g(x) ist nicht differenzierbar.*

b) Geben Sie mit hinführenden Berechnungen die Geradengleichung für den Fall x>3 so an, dass die Funktion h(x) differenzierbar ist.

$$h(x)=\begin{Bmatrix} x^2+2x\text{, für } x\leq 3 \\ \dots\dots\text{, für } x>3 \end{Bmatrix} \Rightarrow h'(x)=\begin{Bmatrix} 2x+2\text{, für } x\leq 3 \\ \dots\dots\text{, für } x>3 \end{Bmatrix}$$

Es gilt h(3)=15 und h'(3)=8, also muss für x>3 eine Gerade vorliegen, die bei x=3 den Funktionswert 15 und die Steigung 8 besitzt.
Steigung 8: $y=8\cdot x+c$
Funktionswert 15 bei x=3: $15=8\cdot 3+c \Rightarrow c=15-24=-9$

Also ist $h(x)=\begin{Bmatrix} x^2+2x\text{, für } x\leq 3 \\ 8x-9\text{, für } x>3 \end{Bmatrix}$ *eine Funktion, die differenzierbar ist.*

---

4 Leiten Sie die Funktion mit der Gleichung $f(x)=3x^2-4$ mit Hilfe einer der beiden folgenden Formeln ab.

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \qquad f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{(3x^2-4)-(3x_0^2-4)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{3\cdot(x^2-x_0^2)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{3\cdot(x-x_0)\cdot(x+x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}3\cdot(x+x_0)=6x_0$$

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{(3\cdot(x_0+h)^2-4)-(3x_0^2-4)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3x_0^2+6x_0h+3h^2-4-3x_0^2+4}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{6x_0h+3h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(6x_0+3h)=6x_0$$

---

5 Es gibt 2 Tangenten an die Parabel mit der Gleichung $f(x)=x^2+6x-4$, die die x-Achse bei x=4 schneiden.
Berechnen Sie die x- und y-Koordinaten der Punkte, an denen diese Tangenten die Parabel berühren.

Mit $f'(x)=2x+6$ *gilt*

$$t_u(x)=f'(u)\cdot(x-u)+f(u)=(2u+6)\cdot(x-u)+u^2+6u-4=2ux-2u^2+6x-6u+u^2+6u-4=$$
$$(2u+6)\cdot x-u^2-4$$

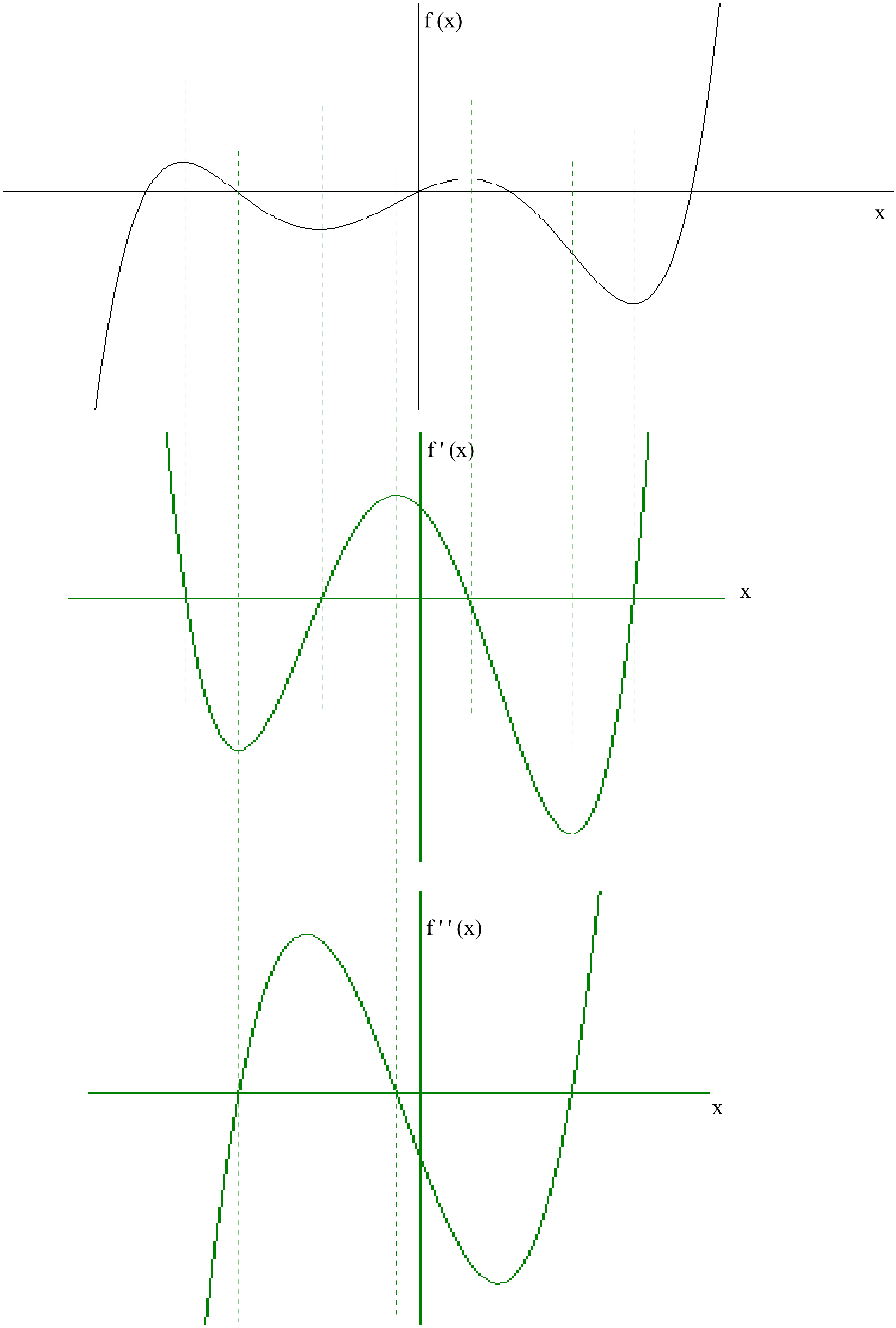
Da die Tangente durch (4/0) verläuft, gilt

$$0=(2u+6)\cdot 4-u^2-4=8u+24-u^2-4 \Rightarrow u^2-8u-20=0 \Rightarrow u_{1,2}=4\pm\sqrt{16+20}=4\pm\sqrt{36}=4\pm 6$$
$$u_1=-2 \Rightarrow f(u_1)=(-2)^2+6\cdot(-2)-4=4-12-4=-12$$
$$u_2=10 \Rightarrow f(u_2)=10^2+6\cdot 10-4=100+60-4=156$$

Die Tangenten berühren den Graph von f(x) also in den Punkten (-2/-12) *und* (10/156) .

---

6 Bilden Sie graphisch die 1. und die 2. Ableitung der auf dem nächsten Blatt gezeichneten Kurve.


f (x)
x
f ' (x)
x
f ' ' (x)
x