Lösung

1

Zwei Folgen sind gegeben, a_n in rekursiver und b_n in expliziter Form:

$$a_{n+1}=2\cdot a_n+4\,;\,a_1=-2 \qquad b_n=\frac{1}{3}\cdot n^3-n^2+\frac{8}{3}\cdot n-4$$

a) Geben Sie die ersten drei Folgenglieder jeder Folge an.

$a_1=-2\,;a_2=0\,;a_3=4$ $\qquad b_1=-2\,;b_2=0\,;b_3=4$

b) Untersuchen Sie, ob $a_n=b_n$ für alle n gilt.

Wenn $a_n=b_n$ gilt, muss man die Gleichheit für alle n zeigen. Wenn dagegen $a_n\neq b_n$ gilt, reicht es zu zeigen, dass für irgendein n die Gleichheit $a_n=b_n$ nicht gilt.

Zwar gilt noch $a_4=b_4=12$, aber für n=5 gilt $a_5=28$ und $b_5=26$ und damit ist gezeigt, dass $a_n=b_n$ nicht für alle n gilt.

2

Berechnen Sie die Grenzwerte der beiden Folgen c_n und d_n.

$$c_n=\frac{2\cdot n^2-4\cdot n+12}{9+12\cdot n^2} \qquad \lim_{n\to\infty} c_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot n^2-4\cdot n+12}{9+12\cdot n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{4}{n}+\frac{12}{n^2}}{\frac{9}{n^2}+12}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$$

$$d_n=3^{\frac{1}{n}}-4 \qquad \lim_{n\to\infty} d_n=\lim_{n\to\infty}\left(3^{\frac{1}{n}}-4\right)=3^0-4=1-4=-3$$

3

Gegeben ist die Folge $a_n=\dfrac{7\cdot n+6}{n+1}$.

a) Zeigen Sie durch Rechnung (ohne Taschenrechner), dass die Folge für alle n monoton wachsend ist.

Wenn die Folge monoton wachsend ist, muss für alle n gelten $a_{n+1}\geq a_n$ oder $a_{n+1}-a_n\geq 0$

$$a_{n+1}-a_n=\frac{7\cdot(n+1)+6}{(n+1)+1}-\frac{7\cdot n+6}{n+1}=\frac{7\mathrm{n}+13}{n+2}-\frac{7\mathrm{n}+6}{n+1}=\frac{(7\mathrm{n}+13)\cdot(n+1)-(7\mathrm{n}+6)\cdot(n+2)}{(n+2)\cdot(n+1)}=$$

$$\frac{7\mathrm{n}^2+7\mathrm{n}+13\mathrm{n}+13-7\mathrm{n}^2-14\mathrm{n}-6\mathrm{n}-12}{(n+2)(n+1)}=\frac{1}{(n+2)(n+1)}>0$$

Der letzte Bruch ist größer als 0, weil n>0 und damit auch der Nenner für alle n größer als 0 ist.

b) Zeigen Sie durch Rechnung (ohne Taschenrechner), dass 8 für die Folge eine obere Schranke ist.

Es muss für alle n gelten: $a_n\leq 8$.

$$\frac{7\mathrm{n}+6}{n+1}\leq 8 \;\Rightarrow\; 7\mathrm{n}+6\leq 8\mathrm{n}+8 \;\Rightarrow\; -2\leq n$$

Die rechte Ungleichung stimmt für alle n mit $n\in\mathbb{R}$. Somit ist die Behauptung bewiesen.

---

4 Berechnen Sie den Grenzwert der geometrischen Folge mit $a_1 = 5$ und $q = \frac{3}{4}$.

Die Folgenglieder einer geometrischen Folge berechnen sich aus $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ *, d.h. bei der gegebenen Folge aus* $a_n = 5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ *. Für n→∞ geht der Wert der Folgenglieder gegen 0, da der Wert der Potenzen von 4 wesentlich stärker wächst als der Wert der Potenzen von 3.*

Der Grenzwert der Folge ist also 0. (Übrigens: $s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{5}{1-\frac{3}{4}} = \frac{5}{\frac{1}{4}} = 5 \cdot \frac{4}{1} = 20$ *)*

---

5 Der Summenwert einer geometrischen Reihe beträgt 2006.
Der erste Summand der zugehörigen geometrischen Folge sei $a_1 = 1$.
Berechnen Sie den Wert des konstanten Quotienten q.

Umstellen der Summenformel: $s = \frac{a_1}{1-q} \Rightarrow 1-q = \frac{a_1}{s} \Rightarrow q = 1 - \frac{a_1}{s} = 1 - \frac{1}{2006} = \frac{2006-1}{2006} = \frac{2005}{2006}$

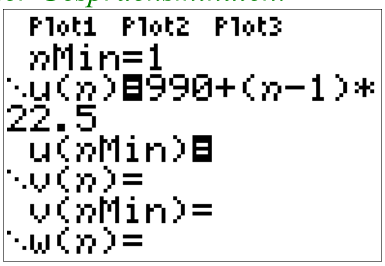
Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben mit dem Taschenrechner.
Benutzte Formeln jeweils auf dem Klausurbogen protokollieren!

---

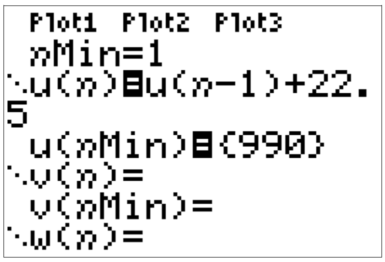
6 Für ein Handy muss monatlich 9,90 € Grundgebühr bezahlt werden.
Jede Gesprächsminute kostet 22,5 Cent.
Die Telefonrechnung soll monatlich 100 € nicht überschreiten.
Berechnen Sie, wie viel Minuten man dann monatlich telefonieren kann.
Geben Sie die Formel an, mit der Sie auf dem Taschenrechner gearbeitet haben.

Es handelt sich hier um eine arithmetische Folge, zu der folgende Formeln gehören:
Explizite Darstellung: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot c$ *mit* $a_1 = 990$ *und* $c = 22{,}5$
Rekursive Darstellung: $a_{n+1} = a_n + c$ *mit* $a_1 = 990$ *und* $c = 22{,}5$
Dabei ist n-1 die Anzahl der Gesprächsminuten.

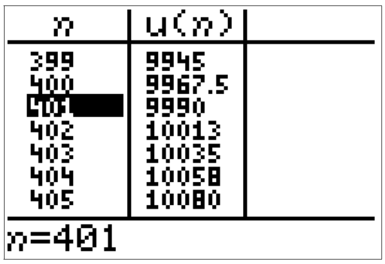
Taschenrechnereingabe:



oder



In der Table-Darstellung sucht man nun den Wert 10000 (für 100,00 €).
Wie man sieht, darf n maximal 401 sein, man kann also n-1=400 Minuten telefonieren, um bei den Gesamtkosten unter 100,00 € zu bleiben.



7 Zur Geburt (am 01.01.) und zu jedem Geburtstag ihre Kindes wollen Eltern 1 000 € auf ein Konto einzahlen. Das Geld wird während der gesamten Laufzeit mit einem festen Zinssatz verzinst. Nach 18 Jahren sollen sich auf dem Konto 30 000 € befinden.

a) Bestimmen Sie mit Hilfe des Taschenrechners, wie hoch der Zinssatz sein muss.

Es handelt sich um ein gemischtes lineares und exponentielles Wachstum, für das folgende Formeln gelten:

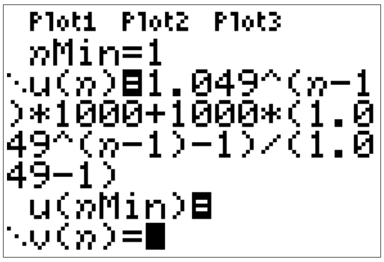
Explizite Darstellung: $a_n = q^{n-1} \cdot a_1 + c \cdot \frac{q^{n-1}-1}{q-1}$ *mit* $a_1 = 1000$ *und* $c = 1000$

Rekursive Darstellung: $a_{n+1} = q \cdot a_n + c$ *mit* $a_1 = 1000$ *und* $c = 1000$

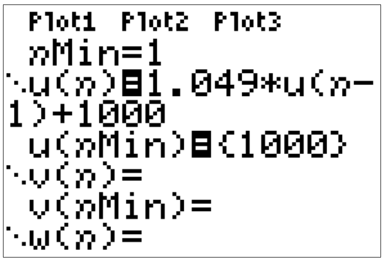
Für n=19 soll der Betrag von 30 000 € erstmals überschritten sein.

q ist gesucht. Es gilt $q = 1 + \frac{p}{100}$ *, wobei p der Prozentsatz ist.*

Taschenrechnereingabe:

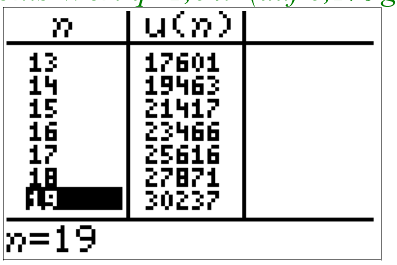


oder



Für q probiert man verschiedene Werte aus und kontrolliert mit der Table-Funktion den Wert für n=19. Oben ist schon der Ergebnis-Wert q=1,049 (auf 0,1% genau) eingetragen.

Tabelle für den Wert q=1,049:



n	u(n)
13	17601
14	19463
15	21417
16	23466
17	25616
18	27871
19	30237

n=19

Das Geld müsste also mit einem Zinssatz von 4,9% verzinst werden.

b) Da ein solcher Zinssatz nicht angeboten wird: Wie viel Geld müssen die Eltern jährlich einzahlen, damit bei einem Zinssatz von 3 % nach 18 Jahren der Betrag von 30 000 € auf dem Konto überschritten wird?

Hier gilt q=1,03. Gesucht und durch Probieren gefunden werden müssen die Werte für a_1 und c *, wobei gilt:* $a_1 = c$.

Taschenrechnereingabe:

oder

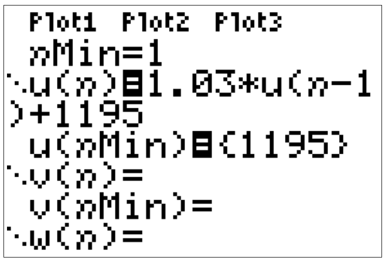
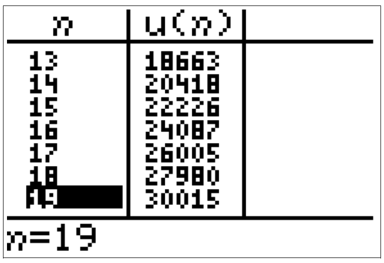


Table-Darstellung:



n	u(n)
13	18663
14	20418
15	22226
16	24087
17	26005
18	27980
19	30015

n=19

Es ergibt sich durch Probieren der Wert 1195 €.

8

> *Je nach Vorkommensgebiet kann sie [die Pappel] eine Größe von 20 bis 35 m erreichen. In unseren Breiten wächst kein Baum schneller als Pappeln. Diese Art hat ihr Wachstum bereits mit 60 Jahren abgeschlossen.*
> Quelle: www.wikipedia.de, Stichwort: Espe/Pappel

Eine Pappel der Größe 1 m wird gepflanzt. Nach einem Jahr hat die sie die Höhe 1,20 m erreicht. Die Pappel soll später tatsächlich eine Höhe von 35 m erreichen.
Zeigen Sie, dass der Faktor q in der Formel zum logistischen Wachstum etwa den Wert 0,2 besitzt und rechnen Sie dann auch mit diesem genäherten Wert.

Formel zum logistischen Wachstum: $a_{n+1}=a_n+\frac{q}{G}\cdot a_n\cdot(G-a_n)$

Hier gilt: $a_1=1\ ;\ a_2=1{,}2\ ;\ G=35$ *Mit diesen Werten kann q berechnet werden:*

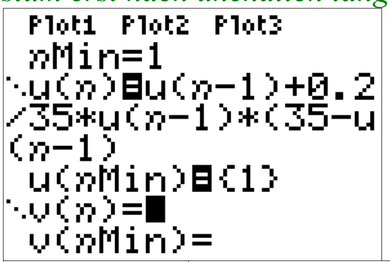
$$a_{n+1}=a_n+\frac{q}{G}\cdot a_n\cdot(G-a_n)\ \Rightarrow\ a_{n+1}-a_n=\frac{q}{G}\cdot a_n\cdot(G-a_n)\ \Rightarrow\ q=\frac{G\cdot(a_{n+1}-a_n)}{a_n\cdot(G-a_n)}=\frac{35\cdot(1{,}2-1)}{1\cdot(35-1)}=\frac{7}{34}$$

Es gilt (Taschenrechner): $\frac{7}{34}=0{,}2058823529\approx 0{,}2$ *q.e.d.*

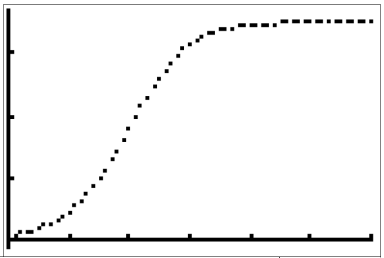
a) Berechnen Sie, wie lange es dauert, bis die Pappel ihre größte Höhe von 35 m erreicht hat.

Einen genauen Zahlenwert kann man nicht angeben, da der Baum auf Grund der Formel für das logistische Wachstum erst nach unendlich langer Zeit die Höhe 35 m erreichen würde.

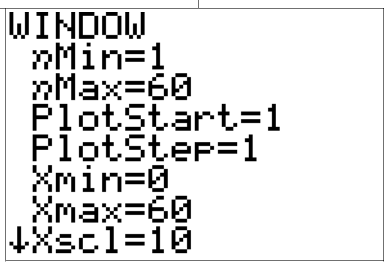
Mit der Eingabe

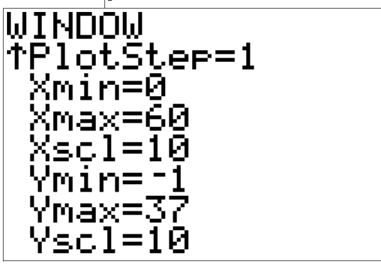


ergibt sich der Graph



mit den Window-Einstellungen



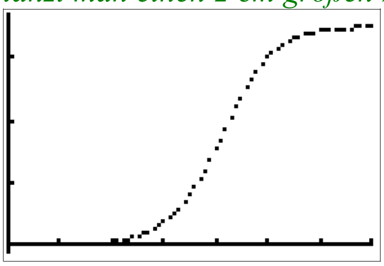


Man sieht am Graph, dass zwischen den Markierungen für 30 Jahre und 40 Jahre der Maximalwert fast erreicht wird. Also könnte man 35 Jahre als Ergebniswert akzeptieren.

b) Steht das Ergebnis im Widerspruch zur Aussage in der Wikipedia? Wenn ja, wie lässt sich dieser Widerspruch erklären?

Laut Wikipedia ist das Wachstum erst mit 60 Jahren beendet. Das scheint ein Widerspruch zum Ergebnis unter a) zu sein. Man muss aber bedenken, dass der Baum bei der Pflanzung schon 1 m groß war. Pflanzt man einen 2 cm großen Schössling, so ergibt sich mit u(nMin)={0.02} *das*

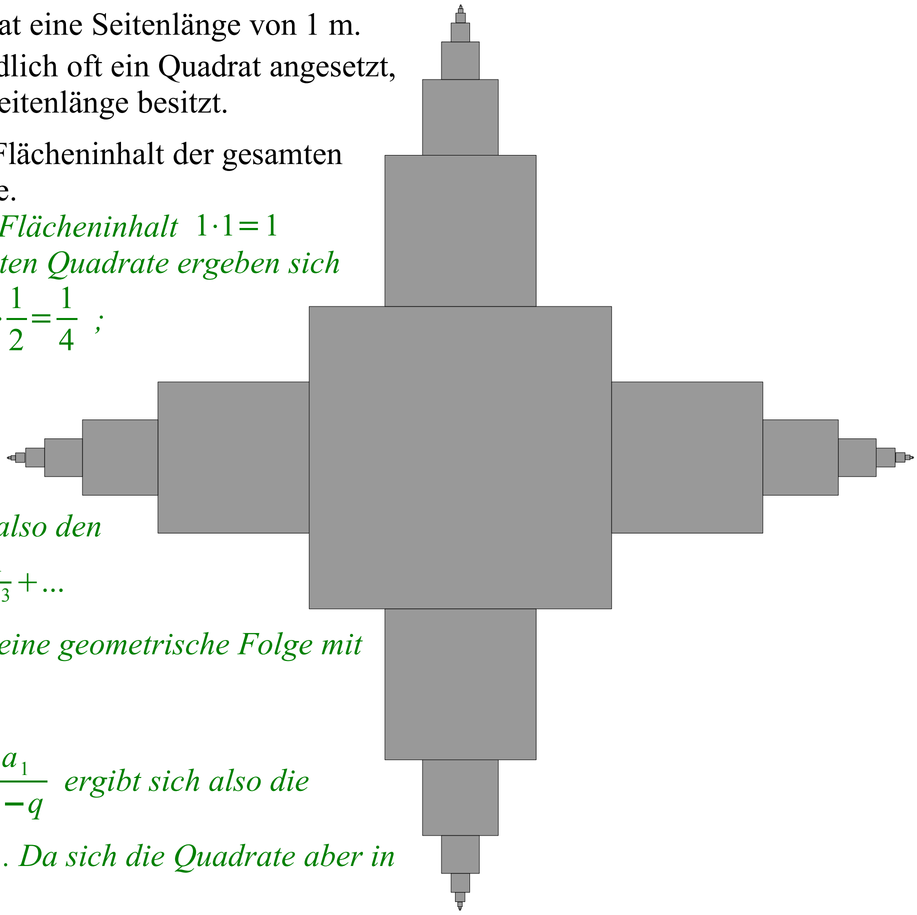
Diagramm



mit der Lösung 60 Jahre.

Ein Widerspruch zum Wikipedia-Eintrag kann also nicht eindeutig festgestellt werden.

9 Das mittlere Quadrat hat eine Seitenlänge von 1 m. Nach außen wird unendlich oft ein Quadrat angesetzt, das jeweils die halbe Seitenlänge besitzt.



a) Berechnen Sie den Flächeninhalt der gesamten grau getönten Fläche.

Das innere Quadrat hat den Flächeninhalt $1\cdot 1=1$
Für die nach außen angesetzten Quadrate ergeben sich der Reihe nach die Werte $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$; $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$; $\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{64}$ *usw.*
Das mittlere Quadrat und die zu einer einzigen Seite angesetzen Quadrate haben also den Flächeninhalt $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\ldots$
Die Summanden bilden also eine geometrische Folge mit $q=\frac{1}{4}$ *und* $a_1=1$.
Mit der Summenformel $s=\frac{a_1}{1-q}$ *ergibt sich also die Summe* $\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{\frac{3}{4}}=1\cdot\frac{4}{3}=\frac{4}{3}$ *. Da sich die Quadrate aber in 4 Richtungen erstrecken, muss dieser Wert mit 4 multipliziert werden: Zwischenwert* $4\cdot\frac{4}{3}=\frac{16}{3}$.
Nun ist aber das mittlere Quadrat 4 mal berechnet worden. Also muss man noch den 3-fachen Wert für das innere Quadrat abziehen: $\frac{16}{3}-3=\frac{16-9}{3}=\frac{7}{3}$.
Der gesamte Flächeninhalt beträgt also $\frac{7}{3}m^2=2\frac{1}{3}m^2$.

b) Berechnen Sie die Summe der Umfänge aller Quadrate.

Das innere Quadrat hat den Umfang $4\cdot 1=4$ *. Für die nach außen angesetzten Quadrate ergeben sich der Reihe nach die Werte* $4\cdot\frac{1}{2}=2$; $4\cdot\frac{1}{4}=1$; $4\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$; $4\cdot\frac{1}{16}=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$ *usw. .*
Die Summe der Umfänge der Quadrate, die sich zu einer einzigen Seite hin erstrecken, kann man schreiben als $4+2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots=4\cdot 1+4\cdot\frac{1}{2}+4\cdot\frac{1}{2^2}+4\cdot\frac{1}{2^3}+\ldots$.
Die Summanden bilden also eine geometrische Folge mit $q=\frac{1}{2}$ *und* $a_1=4$.
Mit der Summenformel $s=\frac{a_1}{1-q}$ *ergibt sich also die Summe* $\frac{4}{1-\frac{1}{2}}=\frac{4}{\frac{1}{2}}=4\cdot\frac{2}{1}=8$.
Da sich die Quadrate aber in 4 Richtungen erstrecken, muss dieser Wert mit 4 multipliziert werden: Zwischenwert $8\cdot 4=32$ *. Es muss allerdings der 3-fache Umfang des inneren Quadrates abgezogen werden:* $32-3\cdot 4=32-12=20$.
Der Umfang aller Quadrate beträgt also 20 m.

Einige Formeln – ungeordnet und unkommentiert

$$a_{n+1} = q \cdot a_n + c$$

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot c$$

$$a_{n+1} = q \cdot a_n$$

$$a_{n+1} = a_n + \frac{q}{G} \cdot a_n \cdot (G - a_n)$$

$$a_{n+1} = a_n + c$$

$$a_n = q^{n-1} \cdot a_1 + c \cdot \frac{q^{n-1} - 1}{q - 1}$$

$$a_n = q^{n-1} \cdot a_1$$

Viel Erfolg bei der Bearbeitung der Aufgaben!