13.06.2005 Klausur 4 Klasse 11c Mathematik

Lösung

1 Eine Parabel 3. Grades verläuft durch den Koordinatenursprung und besitzt im Punkt P(2/3) einen Wendepunkt.
Zeigen Sie, dass die Gerade g, die durch den Wendepunkt verläuft und die x-Achse bei 8 schneidet, die Gleichung $y=-\frac{1}{2}\cdot x+4$ besitzt.

Die Gerade verläuft durch den Wendepunkt bei P(2/3) und durch die x-Achse bei Q(8/0).

Daraus ergibt sich die Steigung m der Geraden: $m=\frac{y_Q-y_P}{x_Q-x_P}=\frac{0-3}{8-2}=-\frac{3}{6}=-\frac{1}{2}$

In die vorläufige Geradengleichung $y=-\frac{1}{2}\cdot x+c$ *werden nun die Koordinaten des Punktes Q eingesetzt:* $0=-\frac{1}{2}\cdot 8+c \Rightarrow c=4$. *Also ist* $y=-\frac{1}{2}\cdot x+4$ *die Geradengleichung.*

Die Wendetangente steht senkrecht auf der Geraden g.

Die Wendetangente hat also die Steigung +2.

Berechnen Sie die Funktionsgleichung der Parabel.

Von der Parabel 3. Grades benötigt man wegen des Wendepunktes die 2. Ableitung:

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \Rightarrow f'(x)=3ax^2+2bx+c \Rightarrow f''(x)=6ax+2b$

Aus dem Text ergibt sich: $f(0)=0$; $f(2)=3$; $f''(2)=0$; $f'(2)=2$

Daraus ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$\mathbf{0=d}$; $8a+4b+2c+d=3$; $12a+2b=0$; $12a+4b+c=2$

$$\left\{\begin{array}{ll}(1) & 8a+4b+2c=3\\ (2) & 6a+b=0\\ (3) & 12a+4b+c=2\end{array}\right\} \overset{\substack{(1)\\(2)\\(1)-2\cdot(3)=(4)}}{\Rightarrow} \left\{\begin{array}{ll}(1) & 8a+4b+2c=3\\ (2) & 6a+b=0\\ (4) & -16a-4b=-1\end{array}\right\} \overset{\substack{(1)\\(2)\\(4)+4\cdot(2)=(5)}}{\Rightarrow} \left\{\begin{array}{ll}(1) & 8a+4b+2c=3\\ (2) & 6a+b=0\\ (5) & 8a=-1\end{array}\right\}$$

aus (5) folgt: $\boldsymbol{a=-\frac{1}{8}}$

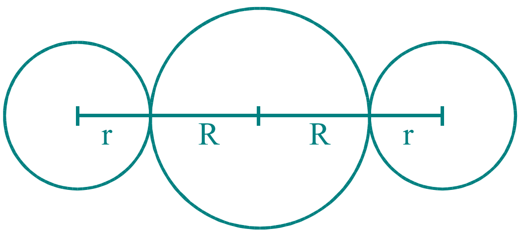
aus (2) folgt: $-\frac{6}{8}+b=0 \Rightarrow \boldsymbol{b=\frac{3}{4}}$

aus (1) folgt: $-1+3+2c=3 \Rightarrow 2c=1 \Rightarrow \boldsymbol{c=\frac{1}{2}}$

Die gesuchte Funktionsgleichung ist also $f(x)=-\frac{1}{8}x^3+\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{2}x$

---

2 Die Mittelpunkte von 3 Kreisen liegen auf einer Geraden.
Die Kreise berühren sich gegenseitig (wie Perlen auf einer Kette).
Die beiden äußeren Kreise besitzen den gleichen Radius.



Die Mittelpunkte der äußeren Kreise sind l=120 Längeneinheiten voneinander entfernt.
Berechnen Sie, wie man die Radien der Kreise wählen muss, damit der gesamte Flächeninhalt aller Kreise a) am kleinsten, b) am größten wird.

Gesucht ist eine extremale Fläche. Zielfunktion: $A(r,R)=2\pi r^2+\pi R^2$
Nebenbedingung ist $2r+2R=120 \;\Rightarrow\; R=60-r$
Eingesetzt in die Zielfunktion ergibt sich:
$A(r)=2\pi r^2+\pi(60-r)^2=2\pi r^2+3600\pi-120\pi r+\pi r^2=3\pi r^2-120\pi r+3600\pi$
Ableitungen: $A'(r)=6\pi r-120\pi \;;\; A''(r)=6\pi>0$
Extremales A ergibt sich aus $A'(r)=0 \;\Rightarrow\; 6\pi r=120\pi \;\Rightarrow\; r=20$
Da die 2. Ableitung von A überall größer als 0 ist, ergibt sich für r=20 ein Minimum mit dem Flächeninhalt $A(20)=3\pi\cdot 400-120\pi\cdot 20+3600\pi=2400\pi$.
Größer oder kleiner kann A nur an den Grenzen des Definitionsbereichs für r werden, also für r=0 und r=60: $A(0)=3600\pi \;;\; A(60)=3\pi\cdot 3600-120\pi\cdot 60+3600\pi=7200\pi$
Es ergeben sich also folgende Lösungen:
a) kleinster Flächeninhalt für r=20 und R=40. Der Radius des mittleren Kreises ist also doppelt so groß wie der Radius der äußeren Kreise.
b) größter Flächeninhalt für r=60 und R=0. Der mittlere Kreis ist bei dieser Lösung verschwunden.

---

3 Gegeben ist eine Kurvenschar durch die Funktionsgleichung $f_t(x)=\frac{1}{6}\cdot x^3+t\cdot x^2+4$.

a) Berechnen Sie in Abhängigkeit von t die Lage der Hochpunkte, die Lage der Tiefpunkte und die Lage der Wendepunkte.

Ableitungen: $f_t'(x)=\frac{1}{2}x^2+2tx \;;\; f_t''(x)=x+2t \;\Rightarrow\; f_t'''(x)=1$

Extrema: $f_t'(x)=0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}x^2+2tx=0 \;\Rightarrow\; x\cdot\left(\frac{1}{2}x+2t\right)=0 \;\Rightarrow\; x_1=0\,;\,x_2=-4t$

Einsetzen in 2. Ableitung: $f_t''(0)=2t \;;\; f_t''(-4t)=-4t+2t=-2t$
Für t>0 gilt $f_t''(0)>0$ *und* $f_t''(-4t)<0$ *, d. h. Minimum bei* $x_1=0$ *und Maximum bei* $x_2=-4t$.
Für t<0 gilt $f_t''(0)<0$ *und* $f_t''(-4t)>0$ *, d. h. Maximum bei* $x_1=0$ *und Minimum bei* $x_2=-4t$.

Die Funktionswerte der Extrema: $f_t(0)=4 \;;\; f_t(-4t)=-\frac{32}{3}t^3+16t^3+4=\frac{16}{3}t^3+4$

Wendepunkte: $f_t''(x)=0 \;\Rightarrow\; x+2t=0 \;\Rightarrow\; x=-2t$
Da die 3. Ableitung für alle x größer als 0 ist, liegen Wendepunkte mit einer Krümmungsänderung von rechts nach links vor.

Funktionswerte der Wendepunkte: $f_t(-2t)=-\frac{4}{3}t^3+4t^3+4=\frac{8}{3}t^3+4$

b) Zeigen Sie, dass alle Graphen der Schar einen Punkt gemeinsam haben und geben Sie die Koordinaten dieses Punktes an.

Da t in der Funktionsgleichung nur in multiplikativer Verknüpfung mit x vorkommt, kann man den Punkt leicht raten: es ist (0/4), da für x=0 die Funktionsgleichung nicht mehr von t abhängig ist.

Rechnerische Lösung durch den Ansatz $f_a(x)=f_b(x) \;\Rightarrow\; \frac{1}{6}x^3+ax^2+4=\frac{1}{6}x^3+bx^2+4 \;\Rightarrow$

$ax^2=bx^2 \;\Rightarrow x^2\cdot(a-b)=0$ *Diese Gleichung hat die Lösung x=0 (siehe oben) oder sie ist allgemein gültig für a=b. Der Fall kann aber ausgeschlossen werden, da zwei verschiedene Funktionen betrachtet werden sollen.*

c) Berechnen Sie die Funktionsgleichung, deren Graph von allen Wendepunkten der Kurvenschar gebildet wird.

Für die Wendepunkte gilt: $x_W = -2t$ *(siehe oben) oder* $t = -\frac{1}{2} x_W$.

Eingesetzt in die Funktionsgleichung ergibt sich die gesuchte Gleichung für die Ortskurve aller Wendepunkte: $f(x_W) = \frac{1}{6} \cdot x_W^3 + t \cdot x_W^2 + 4 = \frac{1}{6} \cdot x_W^3 - \frac{1}{2} \cdot x_W^3 + 4 = -\frac{1}{3} \cdot x_W^3 + 4$

---

4 Der Graph der Funktionsgleichung $f(x) = 2 \cdot x^2 - a \cdot x$ ist achsensymmetrisch zu einer senkrechten Gerade, die die x-Achse bei 2 schneidet.
Berechnen Sie den Wert für a.

Ist eine Kurve achsensymmetrisch zu einer senkrechten Geraden bei x=u, so gilt die Beziehung $f(x) = f(-x+2u)$. *In diesem speziellen Fall gilt u=2 und somit* $f(x) = f(-x+4)$.

Also: $2x^2 - ax = 2 \cdot (-x+4)^2 - a \cdot (-x+4)$

$2x^2 - ax = 2x^2 - 16x + 32 + ax - 4a$

$16x - 32 = 2ax - 4a$

Da die Symmetriebeziehung für jeden x-Wert gelten muss, wird ein spezieller x-Wert ausgewählt, z. B. x=0. Daraus folgt: $-32 = -4a \Rightarrow \boldsymbol{a = 8}$

Man hätte auch die Gleichung $16x - 32 = 2ax - 4a$ *umformen können zu* $a = \frac{16x - 32}{2x - 4} = 8$

Probe:

$f(x) = 2x^2 - 8x$; $f(-x+4) = 2(-x+4)^2 - 8(-x+4) = 2x^2 - 16x + 32 + 8x - 32 = 2x^2 - 8x = f(x)$

Viel Erfolg bei der Bearbeitung der Aufgaben!