09.03.2005 Klausur 3 Klasse 11c Mathematik

Lösung

1 Bilden Sie die Ableitung folgender Funktionen

a) $f(x)=2\cdot x^{\pi+3}$ $\quad f'(x)=2\cdot(\pi+3)\cdot x^{\pi+2}$

b) $g(x)=\sqrt[5]{x^2}=x^{\frac{2}{5}}$ $\quad g'(x)=\frac{2}{5}\cdot x^{-\frac{3}{5}}=\frac{2}{5\cdot\sqrt[5]{x^3}}$

c) $h(x)=\frac{-7}{8\cdot x^{11}}=-\frac{7}{8}\cdot x^{-11}$ $\quad h'(x)=-\frac{7}{8}\cdot(-11)\cdot x^{-12}=\frac{77}{8\cdot x^{12}}$

d) $i(x)=\frac{2}{5}\cdot x^3-7\cdot\sqrt{x}+\frac{2}{3\cdot x}$ $\quad i'(x)=\frac{6}{5}\cdot x^2-\frac{7}{2\cdot\sqrt{x}}-\frac{2}{3\cdot x^2}$

2 Berechnen Sie mit Hilfe des Differenzenquotienten die Ableitung der Funktion

$f(x)=3x^2-2x$

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{\left(3(x_0+h)^2-2(x_0+h)\right)-\left(3x_0^2-2x_0\right)}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{3x_0^2+6x_0h+3h^2-2x_0-2h-3x_0^2+2x_0}{h}=\lim_{h\to 0}\left(6x_0+3h-2\right)=6x_0-2$$

also $f'(x)=6x-2$

3 Gegeben ist die Funktion mit der Gleichung $f(x)=x\cdot(9-x^2)$.
Berechnen Sie die Steigungen in den Punkten der zugehörigen Kurve, in denen die Kurve die x- und/oder die y-Achse schneidet.

Die x-Achse wird geschnitten, wenn f(x)=0. Also: $x\cdot(9-x^2)=0 \Rightarrow x_1=0\,;x_{2,3}=\pm 3$

Es gilt $f(x)=x\cdot(9-x^2)=9x-x^3$ *, also* $f'(x)=9-3x^2$

Steigungen bei $x_{1,2,3}$ *:* $f'(0)=9$; $f'(\pm 3)=9-3\cdot 9=-18$

Da der Schnittpunkt mit der y-Achse mit einem Schnittpunkt mit der x-Achse übereinstimmt, muss dieser Fall nicht gesondert betrachtet werden.

4 a) Zeigen Sie, dass $\frac{1}{4}\cdot x^3-\frac{1}{4}\cdot x^2-3\cdot x=\frac{1}{4}\cdot x\cdot(x-4)\cdot(x+3)$

$\frac{1}{4}\cdot x\cdot(x-4)\cdot(x+3)=\frac{1}{4}\cdot x\cdot(x^2+3x-4x-12)=\frac{1}{4}\cdot x\cdot(x^2-x-12)=\frac{1}{4}\cdot x^3-\frac{1}{4}\cdot x^2-3\cdot x$ *, q.e.d.*

b) Untersuchen Sie die Kurve mit der Funktionsgleichung $f(x)=\frac{1}{4}\cdot x\cdot(x-4)\cdot(x+3)$ auf folgende Eigenschaften: Nullstellen, Schnittpunkt mit der y-Achse, Extrema, Wendepunkte
und zeichnen Sie den Graphen.

Nullstellen: Die Bedingung f(x)=0 ist erfüllt, wenn ein Faktor des Funktionsterms gleich 0 ist.
Das gilt für die x-Werte $x_{N1}=0$, $x_{N2}=4$ *und* $x_{N3}=-3$.

Schnittpunkt mit der y-Achse: Bedingung x=0, also $f(0)=\frac{1}{4}\cdot 0\cdot(-4)\cdot 3=0$

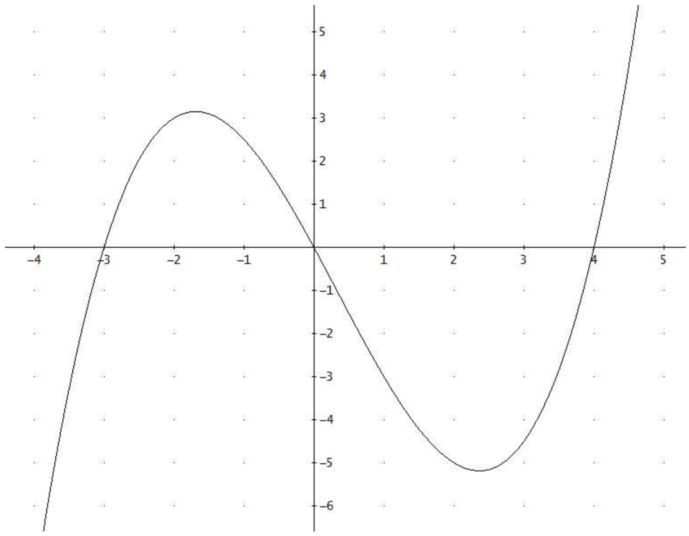
Extrema: Bedingung f '(x)=0. Unter a) war gezeigt: $f(x)=\frac{1}{4}\cdot x^3-\frac{1}{4}\cdot x^2-3\cdot x$

also: $f'(x)=\frac{3}{4}\cdot x^2-\frac{1}{2}\cdot x-3 \overset{!}{=} 0 \;\Rightarrow\; x^2-\frac{2}{3}\cdot x-4=0 \;\Rightarrow\; x_{1,2}=\frac{1}{3}\pm\sqrt{\frac{1}{9}+4}=\frac{1}{3}\pm\sqrt{\frac{37}{9}}$

$x_1\approx 2{,}36 \;\;;\;\; f(x_1)\approx -5{,}19 \;\;;\;\; x_2\approx -1{,}69 \;\;;\;\; f(x_2)\approx 3{,}15$

Wendepunkte: Bedingung f''(x)=0. $f''(x)=\frac{3}{2}\cdot x-\frac{1}{2} \overset{!}{=} 0 \;\Rightarrow\; \frac{3}{2}\cdot x=\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; x=\frac{1}{3}$

$x\approx 0{,}33 \;\;;\;\; f(x)\approx -1{,}02$



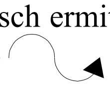
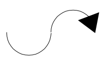
---

5 Lösen Sie diese Aufgabe auf der nächsten Seite.

a) Bilden Sie graphisch die erste und zweite Ableitung der gezeichneten Kurven.

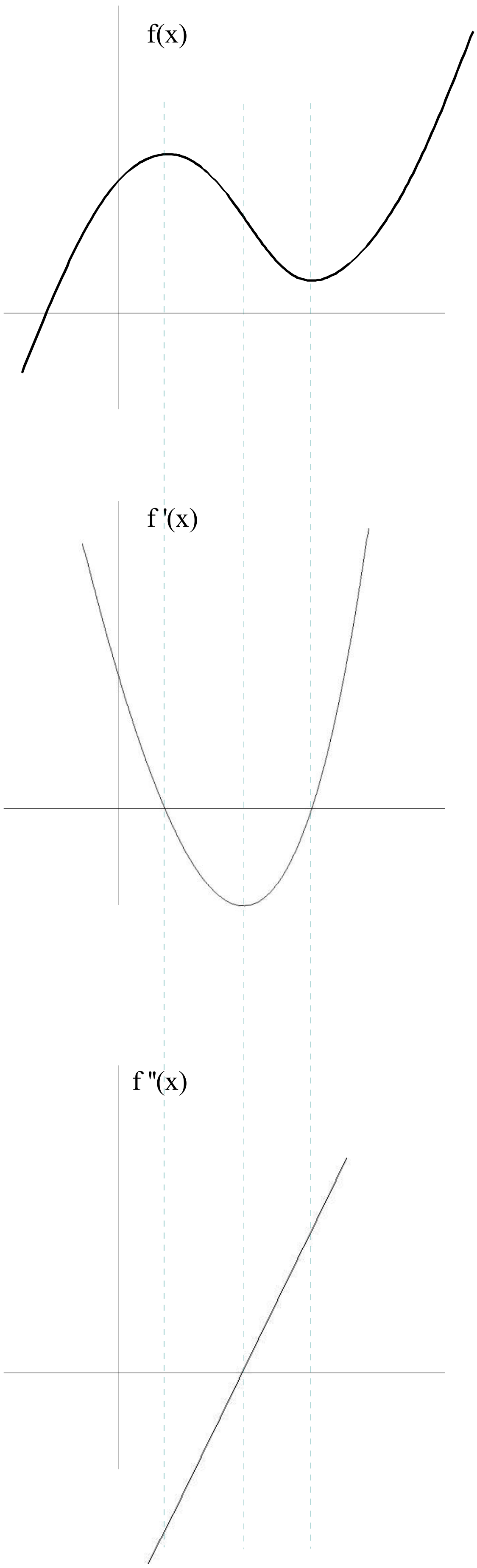
b) Beschreiben Sie an Hand Ihrer Zeichnung, wie man <u>rechnerisch</u> entscheiden kann, ob ein Extremum ein Hochpunkt oder ein Tiefpunkt ist.

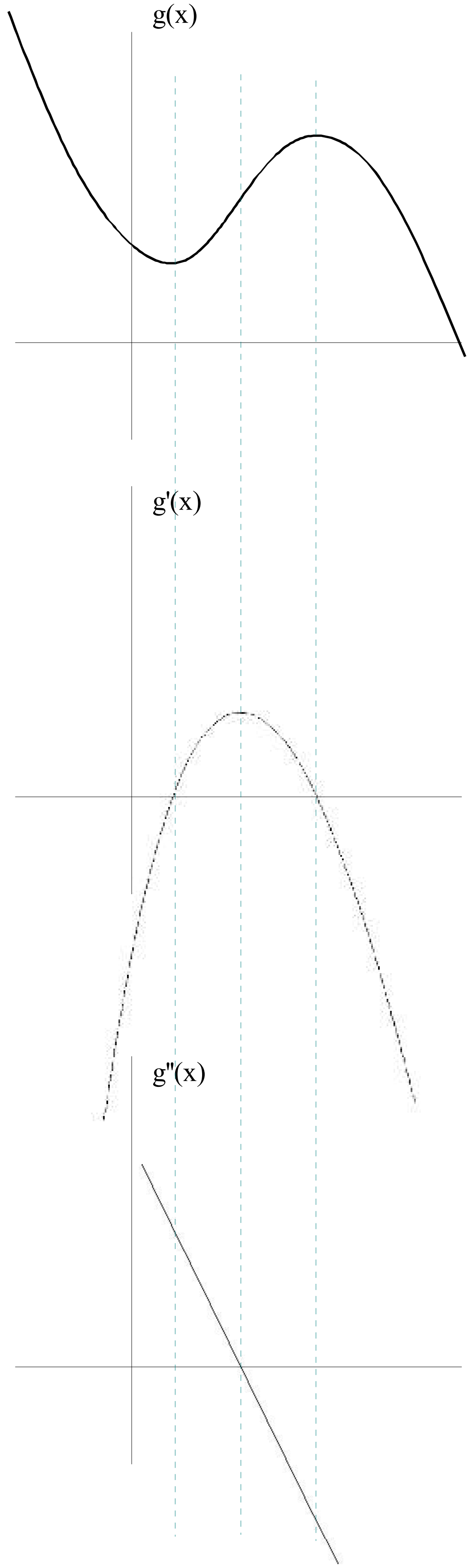
Hochpunkt: f'(x)=0 und f''(x)<0 *Tiefpunkt: f'(x)=0 und f''(x)>0*

c) Beschreiben Sie an Hand Ihrer Zeichnung, wie man rechnerisch ermitteln kann, ob die Kurve am Wendepunkt von einer Rechts- in eine Linkskurve  oder von einer Links- in eine Rechtskurve  übergeht.

Wendepunkt: f''(x)=0
Beim Übergang von einer Rechts- in eine Linkskurve geht der Graph der 2. Ableitung mit positiver Steigung durch die x-Achse, also f'''(x)>0,
beim Übergang von einer Links- in eine Rechtskurve gilt entsprechend f'''(x)<0.

Viel Erfolg bei der Bearbeitung der Aufgaben!


f(x)
f '(x)
f ''(x)


g(x)
g'(x)
g''(x)