20.12.2004 Klausur 2 Klasse 11c Mathematik

Lösung

1 Berechnen Sie, ab welchem n die Folge $a_n = n^2 - 20n$ monoton ist.

Zunächst wird an Hand einiger Folgenglieder überprüft,ob die Folge monoton steigend oder fallend sein könnte: $a_1 = 1^2 - 20 \cdot 1 = -19$; $a_2 = 2^2 - 20 \cdot 2 = -36$; $a_3 = 3^2 - 20 \cdot 3 = -51$

Es sieht so aus, als sei die Folge monoton fallend. Es müsste dann für alle n gelten $a_n \geq a_{n+1}$.

$$n^2 - 20n \geq (n+1)^2 - 20 \cdot (n+1) \Rightarrow n^2 - 20n \geq n^2 + 2n + 1 - 20n - 20 \Rightarrow 0 \geq 2n - 19 \Rightarrow n \leq \frac{19}{2}$$

Daraus folgt, dass die Folge nur bis n=9 fallend ist.

Wählt man dagegen den Ansatz $a_n \leq a_{n+1}$ *für monoton steigende Folgen, ergibt sich bei nahezu identischer Rechnung* $n \geq \frac{19}{2}$ *, d. h. ab n=10 ist die Folge monoton steigend.*

---

2 Finden Sie eine beliebige obere und eine beliebige untere Schranke für die Folge $a_n = \frac{3n-1}{n+5}$.

Führen Sie den rechnerischen Nachweis für Ihre Vermutungen.

Das erste Folgenglied hat den Wert $a_1 = \frac{3-1}{1+5} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ *. Der Grenzwert der Folge beträgt 3.*

Angenommen, die Folge sei monoton steigend, so könnte für die größte untere Schranke $s = \frac{1}{3}$ *und für die kleinste obere Schranke* $S = 3$ *gelten.*

Nachweis für $s = \frac{1}{3}$ *:*

$$a_n \geq s \Rightarrow \frac{3n-1}{n+5} \geq \frac{1}{3} \Rightarrow 3 \cdot (3n-1) \geq n+5 \Rightarrow 9n - 3 \geq n + 5 \Rightarrow 8n \geq 8 \Rightarrow n \geq 1$$

Da für sämtliche Folgenglieder $n \geq 1$ *gilt, ist* $s = \frac{1}{3}$ *tatsächlich eine untere Schranke.*

Nachweis für S=3:

$$a_n \leq S \Rightarrow \frac{3n-1}{n+5} \leq 3 \Rightarrow 3n - 1 \leq 3 \cdot (n+5) \Rightarrow 3n - 1 \leq 3n + 15 \Rightarrow -1 \leq 15$$

Da $-1 \leq 15$ *allgemeingültig ist, d. h. damit natürlich auch für alle n gilt, ist S=3 tatsächlich eine obere Schranke.*

Eine Untersuchung auf Monotonie würde zeigen, dass s und S die größte untere und die kleinste obere Schranke sind. Alle Werte kleiner als s und größer als S sind natürlich auch Schranken im Sinne der Aufgabenstellung.

---

3 Untersuchen Sie, ob folgende Folgen einen Grenzwert besitzen.

- Wenn es einen Grenzwert gibt, geben Sie diesen Grenzwert an und zeigen Sie durch kurze Rechnung oder knappe schriftliche Begründung, wie Sie den Grenzwert gefunden haben.
- Wenn es keinen Grenzwert gibt, erläutern Sie kurz, warum es keinen Grenzwert gibt.

$$a_n=\frac{7n-3}{2-7n}=\frac{1-\frac{3}{7n}}{\frac{2}{7n}-1}\underset{n\to\infty}{\to}\frac{1-0}{0-1}=-1$$ *Grenzwert ist also* $g=-1$.

$$b_n=\frac{2^{3n+1}-4}{4\cdot 2^{3n}+8}=\frac{2^{3n+1}-4}{2^{3n+2}+8}=\frac{1-\frac{4}{2^{3n+1}}}{2+\frac{8}{2^{3n+1}}}\underset{n\to\infty}{\to}\frac{1}{2}$$ *Grenzwert ist also* $g=\frac{1}{2}$.

$$c_n=\frac{n^3-1}{n^2}=\frac{n-\frac{1}{n^2}}{1}=n-\frac{1}{n^2}\underset{n\to\infty}{\to}n-0\to\infty$$ *Die Folge hat also keinen Grenzwert.*

$d_n=\frac{3\cdot\sin n}{\sqrt{n}}$ *Der Wert von* $\sin n$ *im Zähler ist betragsmäßig kleiner oder gleich 1. Damit gilt folgende Abschätzung:* $\left|\frac{3\cdot\sin n}{\sqrt{n}}\right|\le\frac{3}{\sqrt{n}}$ *. Der Nenner wird für wachsendes n immer größer, der Wert des gesamten Bruchs geht also gegen 0. Damit gehen dann wegen der Abschätzung auch die Folgenglieder von* d_n *gegen 0. Grenzwert ist also g=0.*

$$e_n=(-1)^n\cdot\frac{1-2n}{n+5}=(-1)^n\cdot\frac{\frac{1}{n}-2}{1+\frac{5}{n}}\underset{n\to\infty}{\to}(-1)^n\cdot\frac{0-2}{1+0}=(-1)^n\cdot(-2)$$ *Es gibt keinen Grenzwert, da die Werte der Folgenglieder für großes n zwischen den beiden Werten -2 und +2 hin- und herspringen.*

$$f_n=\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)}{n^2-\frac{1}{4}}=\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)}=1$$ *Alle Folgenglieder der Folge haben den Wert 1, folglich ist auch g=1 der Grenzwert der Folge.*

---

4 Die Folge $a_n=\frac{4n}{2-3n}$ hat den Grenzwert $-\frac{4}{3}$.

Beweisen Sie diese Aussage unter Verwendung der Ungleichung $|a_n-g|<\varepsilon$.

$$\left|\frac{4n}{2-3n}-\left(-\frac{4}{3}\right)\right|<\varepsilon\ \Rightarrow\ \left|\frac{4n\cdot 3+4\cdot(2-3n)}{(2-3n)\cdot 3}\right|=\left|\frac{12n+8-12n}{6-9n}\right|=\left|\frac{8}{6-9n}\right|<\varepsilon\ \overset{da\ 6-9n<0\ \text{für alle}\ n}{\Rightarrow}$$

$$\frac{8}{9n-6}<\varepsilon\ \Rightarrow\ 8<9n\varepsilon-6\varepsilon\ \Rightarrow\ 8+6\varepsilon<9n\varepsilon\ \Rightarrow\ \frac{8+6\varepsilon}{9\varepsilon}<n$$ *Zu jedem beliebigen ε>0, sei es auch noch so klein, gilt also von einem bestimmten* n_0 *an die gegebene Ungleichung.*

Beispiel: $\varepsilon=\frac{1}{1000}\ \Rightarrow\ n>\frac{8+\frac{6}{1000}}{\frac{9}{1000}}=\frac{8006}{1000}\cdot\frac{1000}{9}=\frac{8006}{9}=889\frac{5}{9}$ *, d. h. ab* n_0 *= 890 liegen alle Folgenglieder näher als* $\frac{1}{1000}$ *an* $-\frac{4}{3}$.

5 Von einer geometrischen Folge sind nur zwei Folgenglieder bekannt: $a_3 = 36$; $a_4 = 24$.

a) Zeigen Sie, dass $a_1 = 81$ und berechnen Sie den Wert von a_5 .

Bei einer geometrischen Folge gilt $a_{n+1} = q \cdot a_n$ *für alle n. q berechnet sich also aus* $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Hier gilt $q = \frac{a_4}{a_3} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$. *Und weiter:* $a_2 = \frac{a_3}{q} = \frac{36}{\frac{2}{3}} = \frac{36 \cdot 3}{2} = 54$; $a_1 = \frac{a_2}{q} = \frac{54}{\frac{2}{3}} = \frac{54 \cdot 3}{2} = 81$

$a_5 = q \cdot a_4 = \frac{2}{3} \cdot 24 = 16$

b) Bestimmen Sie die Summe aller Folgenglieder dieser Folge. Falls Sie kein q ermitteln können (und nur dann!), rechnen Sie mit $q = \frac{5}{7}$.

Der Grenzwert der geometrischen Reihe bestimmt sich nach der Formel $s = \frac{a_1}{1-q}$.

Hier gilt also: $s = \frac{81}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{81}{\frac{1}{3}} = 81 \cdot 3 = 243$.

Mit dem Ersatzwert $q = \frac{5}{7}$ *ergibt sich* $s = \frac{81}{1 - \frac{5}{7}} = \frac{81}{\frac{2}{7}} = \frac{81 \cdot 7}{2} = 283{,}5$.

---

6 Von einer geometrischen Folge weiß man, dass das erste Folgenglied den Wert $a_1 = 5$ hat und dass die Summe aller Folgenglieder 8,75 beträgt.
Berechnen Sie den Wert von q und geben Sie die Werte von a_2 und a_3 an.

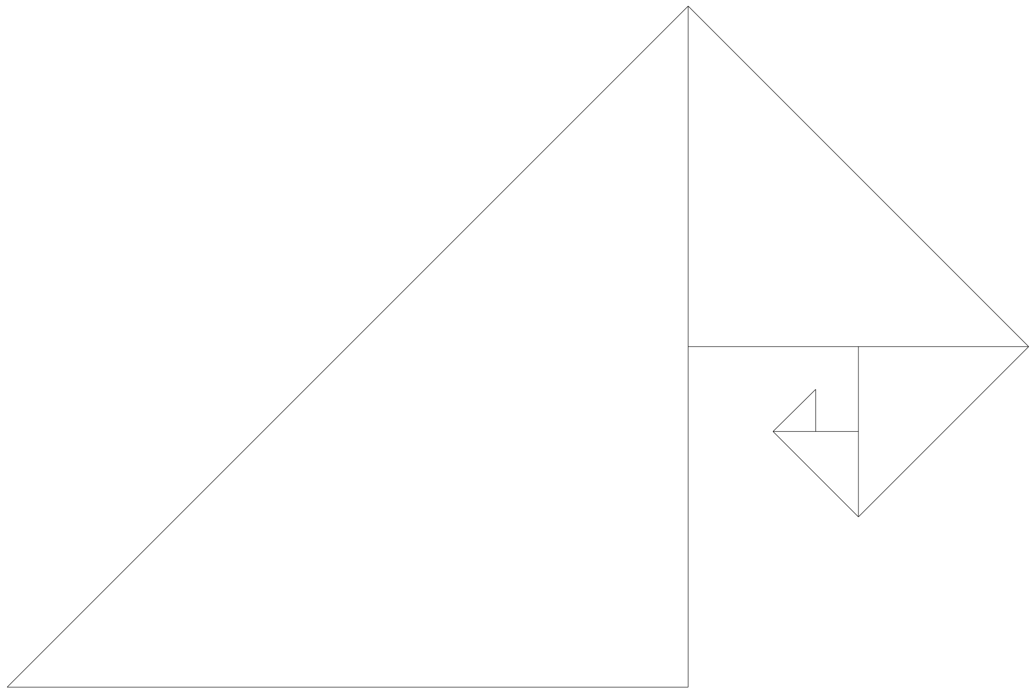
Auf Grund der gegebenen Werte gilt mit $s = \frac{a_1}{1-q}$: $8{,}75 = \frac{5}{1-q} \Rightarrow \frac{35}{4} \cdot (1-q) = 5 \Rightarrow$

$\frac{35}{4} - \frac{35}{4} \cdot q = 5 \Rightarrow -\frac{35}{4} \cdot q = \frac{20}{4} - \frac{35}{4} \Rightarrow -\frac{35}{4} \cdot q = -\frac{15}{4} \Rightarrow q = \frac{15}{4} \cdot \frac{4}{35} = \frac{15}{35} = \frac{3}{7}$

Damit gilt: $a_2 = q \cdot a_1 = \frac{3}{7} \cdot 5 = \frac{15}{7}$; $a_3 = q \cdot a_2 = \frac{3}{7} \cdot \frac{15}{7} = \frac{45}{49}$

---

7 Die unten abgebildete Dreiecksspirale denkt man sich unendlich weit nach innen fortgesetzt.
Die Dreiecke sind alle rechtwinklig.
Das größte Dreieck hat zwei Katheten mit den Seitenlängen 1.
Das nächstkleinere Dreieck hat jeweils Seiten der halben Länge.
Berechnen Sie den Flächeninhalt der gesamten (d.h. von allen unendlich vielen Dreiecken bedeckten) Fläche.
Zusatzaufgabe für Zusatzpunkte (also keine Pflichtaufgabe!): Berechnen Sie den Umfang (also nur außen liegende Begrenzungen) der gesamten entstehenden Figur.



Das größte Dreieck besitzt die halbe Fläche eines Quadrats mit der Seitenlänge 1, hat also den Flächeninhalt $a_1 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{1}{2} \cdot 1$.

Das nächstkleinere Dreieck besitzt die halbe Fläche eines Quadrats mit der Seitenlänge $\frac{1}{2}$ *, hat also den Flächeninhalt* $a_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$.

Das nächste Dreieck besitzt die halbe Fläche eines Quadrats mit der Seitenlänge $\frac{1}{4}$ *, hat also den Flächeninhalt* $a_3 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16}$.

Man erkennt, dass die Flächen der Dreiecke eine geometrische Folge mit $a_1 = \frac{1}{2}$ *und* $q = \frac{1}{4}$ *bilden.*

Die Gesamtfläche beträgt also $s = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$.

Lösung der Zusatzaufgabe:
Bis auf das erste Dreieck tragen alle Dreiecke mit ihrer Hypotenuse und einer halben Kathete zum Umfang bei. Vom ersten Dreieck kommt zusätzlich noch eine Kathete hinzu.

Die Längen der Hypotenusen ergeben sich aus einer geometrischen Folge mit $a_1 = \sqrt{2}$ *und* $q = \frac{1}{2}$.

Die Längen der Katheten ergeben sich aus einer geometrischen Folge mit $a_1 = 1$ *und* $q = \frac{1}{2}$.

Umfang $U = 1 + s_H + \frac{1}{2} \cdot s_K = 1 + 2 \cdot \sqrt{2} + \frac{1}{2} \cdot 2 = 2 \cdot \sqrt{2} + 2 \approx 4{,}8$

Viel Erfolg bei der Bearbeitung der Aufgaben!