07.02.2005 Klassenarbeit 3 Klasse 7d Mathematik

Lösung

1 Berechne die Wahrscheinlichkeit für folgende Würfel-Ereignisse (echter Würfel mit Zahlen von 1 bis 6).

a) Der Würfel zeigt eine 3. $p(3)=\frac{1}{6}$

b) Der Würfel zeigt eine Zahl, die größer als 4 ist. $p(5\,oder\,6)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

c) Der Würfel zeigt keine 6. $p(keine\,6)=1-p(6)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

d) Der Würfel zeigt eine 7. $p(7)=0$

e) Der Würfel zeigt eine Zahl, die durch 2 oder 3 zu teilen ist. $p(2,3,4\,oder\,6)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

---

2 Bei einem Skat-Spiel (32 Karten, jeweils die Werte 7, 8, 9, 10, Bube, Dame, König, As von den Farben Kreuz, Pik, Herz, Karo) wurden beim Ausgeben dem 1. Spieler schon 5 Karten ausgeteilt.

a) Der 2. Spieler hat durch einen Spiegel-Trick erkennen können, dass der 1. Spieler 2 Könige, eine 8, eine 9 und Herz-Bube bekommen hat.
Berechne, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass der 2. Spieler nun als erste Karte Kreuz-Bube erhält.

Der Kreuz-Bube war bei den ersten 5 Karten noch nicht dabei. Er ist also in den verbliebenen 27 Karten noch dabei. Für die nächste ausgegebene Karte gilt also $p(Kreuz-Bube)=\frac{1}{27}$.

b) Beim nächsten Spiel passt der 1. Spieler besser auf, und der 2. Spieler weiß deshalb nicht, welche 5 Karten der 1. Spieler erhalten hat.
Berechne, wie groß der 2. Spieler nun die Wahrscheinlichkeit dafür einschätzen muss, dass er als erste Karte Kreuz-Bube erhält.

Im Gegensatz zu Aufgabenteil a) weiß man hier nicht, ob der Kreuz-Bube schon ausgegeben ist. Der Kreuz-Bube kann also noch jede der 32 Karten sein. Folglich gilt: $p(Kreuz-Bube)=\frac{1}{32}$.

Wer dieses Ergebnis nicht einsehen kann, überlege sich einmal folgende Situationen:

a) 31 Karten werden offen ausgelegt. Man sieht, dass der Kreuz-Bube nicht dabei ist. Wie groß ist wohl die Wahrscheinlichkeit, dass die letzte Karte der Kreuz-Bube ist? Natürlich p=1 !

b) 31 Karten werden verdeckt hingelegt. Man sieht also nicht, ob der Kreuz-Bube dabei ist. Wie groß ist nun die Wahrscheinlichkeit, dass die letzte Karte der Kreuz-Bube ist? Auch p=1 ? Das kann doch wohl nicht sein! Mit großer Wahrscheinlichkeit ist er doch eine der hingelegten Karten. Also ist die Wahrscheinlichkeit $p(Kreuz-Bube)=\frac{1}{32}$.

3 Von den weit über 1000 Schülern der ABC-Schule sind 60% Mädchen und 40% Jungen.
Der Reihe nach werden 10 Schüler durch Zufall ausgewählt, um als Abordnung eine befreundete Austauschschule zu besuchen. Nach der 9. Wahl sind 5 Mädchen und 4 Jungen ausgewählt worden.

a) Begründe, warum kein Laplace-Versuch vorliegt, wenn es darum geht, ob ein Mädchen oder ein Junge gewählt wird.

Bei einem Laplace-Versuch sind alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich. Es gibt aber mehr Mädchen als Jungen. Deshalb ist die Wahrscheinlichkeit ein Mädchen zu wählen größer als einen Jungen zu wählen. Also liegt kein Laplace-Versuch vor.

b) Beschreibe, wie man diesen Zufallsversuch (Wählen eines Schülers / einer Schülerin) mit Hilfe von Kugeln in einer Urne in einen Laplace-Versuch umwandeln kann.

Man gibt z. B. 6 gelbe und 4 grüne Kugeln in die Urne. Eine gelbe Kugel steht für „Mädchen" und eine grüne Kugel für „Junge". Beim Kugelziehen liegt ein Laplace-Versuch vor, da die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen jeder Kugel gleich ist.

Weiter gilt $p(gelb)=\frac{6}{10}$ *und* $p(grün)=\frac{4}{10}$. *Die Wahrscheinlichkeiten stimmen also mit den Wahrscheinlichkeiten p(Mädchen) und p(Junge) überein.*

c) Will man die Wahrscheinlichkeit für die 10. Wahl berechnen, stehen ja streng genommen nicht mehr 60% Mädchen und 40% Jungen zur Auswahl. Warum kann man trotzdem mit 60% und 40% rechnen?

Da es insgesamt weit über 1000 Schüler sind, fallen die schon ausgewählten 9 Schüler prozentual nicht ins Gewicht.
Angenommen, es wären genau 1000 Schüler und alle 9 gewählten Schüler wären Jungen, dann würde für die Wahl des 10. Schülers gelten: p(Mädchen)=0,605=60,5% und p(Junge)=0,395=39,5%.
Da aber 5 Mädchen und 4 Jungen ausgewählt wurden, gilt nun p(Mädchen)=0,60040 und p(Junge)=0,39960. Also haben sich die prozentualen Wahrscheinlichkeiten nur unwesentlich geändert.
Generell gilt: Je größer die Anzahl der Elemente ist, aus denen gewählt werden kann, desto weniger wirkt sich die Abwesenheit einiger Elemente auf die Wahrscheinlichkeiten aus.

---

4 In einem Beutel sind 200 Kugeln. Es gibt rote, gelbe und blaue Kugeln. Wie viel Kugeln von jeder Sorte vorhanden sind, weiß man nicht.
In einem Zufallsversuch wird nun mehrmals jeweils 1 Kugel aus dem Beutel geholt, die Farbe wird aufgeschrieben und die Kugel wird wieder in den Beutel zurück gelegt.
Der Versuch wird 50 mal durchgeführt. Dabei waren 21 Kugeln rot, 11 Kugeln gelb und der Rest blau.

Es waren 50-21-11=18 blaue Kugeln.

a) Berechne die relativen Häufigkeiten h(rot), h(gelb) und h(blau) für die Ergebnisse „rote Kugel", „gelbe Kugel" und „blaue Kugel".

$h(rot)=\frac{21}{50}$; $h(gelb)=\frac{11}{50}$; $h(blau)=\frac{18}{50}$

b) Gib eine Prognose zum Ziehen einer roten, gelben oder blauen Kugel ab, indem du sinnvoll Wahrscheinlichkeiten p(rot), p(gelb) und p(blau) für das zukünftige Ziehen einer roten, gelben oder blauen Kugel ermittelst.

Die Frage ist nicht eindeutig zu beantworten.
Eine Möglichkeit wäre, die Wahrscheinklichkeiten gleich den relativen Häufigkeiten zu setzen. Oft versucht man aber, für Wahrscheinlichkeiten „einfache“ Brüche oder „glatte“ Zahlen zu finden. Dazu rundet man die relativen Häufigkeiten geringfügig, so dass man gut kürzen kann.
In unserem Fall wäre z. B. folgende Lösung denkbar:

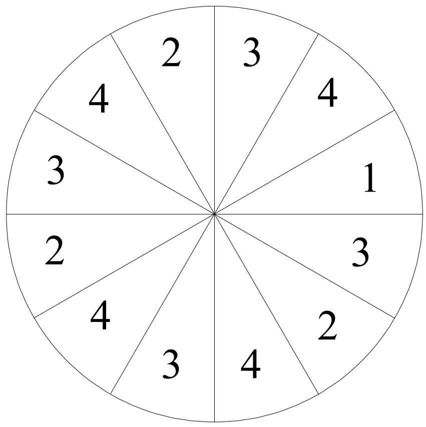
$$p(rot)=\frac{20}{50}=\frac{2}{5}=0{,}40=40\% \;\; ; \;\; p(gelb)=\frac{10}{50}=\frac{1}{5}=0{,}20=20\% \;\; ; \;\; p(blau)=\frac{20}{50}=\frac{2}{5}=0{,}40=40\%$$

c) Wie viele blaue Kugeln gibt es als Folge deiner Prognose unter b) im Beutel?

Wenn 40% der Kugeln blau sind, dann gibt es bei 200 Kugeln $200\cdot\frac{40}{100}=80$ *blaue Kugeln.*

---

5 Zu nebenstehendem Glücksrad gibt es folgenden Gewinnplan:



Es wird gezogen die Zahl	1	2	3	4
Der Preis beträgt in Cent	60	40	10	0

Der Einsatz beträgt pro Spiel 20 Cent.

a) Berechne, wie hoch der durchschnittliche Gewinn bei einem einzelnen Spiel ist.

Es wird gezogen die Zahl	1	2	3	4
so oft kommt die Zahl vor	*1*	*3*	*4*	*4*
Der Preis beträgt in Cent	60	40	10	0
bei 12 Spielen gewinnt man	*60*	*120*	*40*	*0*

In 12 Spielen gewinnt man also im Mittel (60+120+40) Cent = 220 Cent.

Bei 1 Spiel sind das dann im Mittel $\frac{220}{12}\,Cent=18\frac{1}{3}\,Cent$.

b) Gib an, für wen sich das Spiel eher lohnt, für den Spieler oder den Anbieter des Spiels. Begründe deine Antwort.

Da der Einsatz höher als der durchschnittliche Gewinn ist, verliert der Spieler auf Dauer etwa knapp 2 Cent pro Spiel. Das Spiel lohnt sich also für den Anbieter des Spieles.

Viel Erfolg bei der Bearbeitung der Aufgaben!