28.11.2003 Klausur 2 Kurs 13 Ma 23 Mathematik Lk

Lösung

1 Gegeben sind die Ebene E: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}0\\3\\-2\end{pmatrix}$

und die Geradenschar g_a : $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-1\\a\\1\end{pmatrix}$

Bei allen Aufgabenteilen müssen die Rechnungen oder die Überlegungen klar erkennbar dokumentiert sein.

a) Stellen Sie die Ebene E in Koordinatenform dar.

Lösung:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}0\\3\\-2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}x=1+2r\\y=r+3s\\z=-1-2s\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}r=\dfrac{x-1}{2}\\ \\ s=\dfrac{-1-z}{2}\end{matrix} \Rightarrow y=\frac{x-1}{2}+3\cdot\frac{-1-z}{2} \overset{\cdot 2}{\Rightarrow}$$

$$2y=x-1-3-3z \Rightarrow x-2y-3z=4$$

b) Überprüfen Sie, ob der Punkt (12/-11/10) auf der Ebene liegt.

Lösung:

Koordinaten in x-2y-3z=4 einsetzen: 12-2·(-11)-3·10=12+22-30=4. *Also liegt der Punkt in E.*

c) Berechnen Sie - wenn möglich - den Wert von a so, dass

α) die Gerade die Ebene E nicht schneidet,

Lösung:

Die Gerade schneidet die Ebene nicht, wenn der Richtungsvektor der Gerade eine Linearkombination der Ebenen-Richtungsvektoren ist und wenn der Ortsvektor in der Geradengleichung nicht in die Ebene zeigt:

$$\begin{pmatrix}-1\\a\\1\end{pmatrix}=r\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}0\\3\\-2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}-1=2r\\a=r+3s\\1=-2s\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}r=-\dfrac{1}{2}\\ \\ s=-\dfrac{1}{2}\end{matrix} \Rightarrow a=-\frac{1}{2}+3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-2$$

Einsetzen von (-1/-2/1) *in der Ebenengleichung (siehe a):* $-1+4-3=0\neq 4$.
Also liegt für a=-2 die Gerade nicht in der Ebene.

β) die Gerade die Ebene E senkrecht durchsticht.
Wenn ein Aufgabenteil nicht zu lösen ist, geben Sie eindeutig an, warum eine Lösung nicht existiert.

Lösung:

Der Richtungsvektor der Geraden muss senkrecht zu den Richtungsvektoren der Ebene stehen:

$$\begin{pmatrix}-1\\a\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}=-2+a+0=0 \;\Rightarrow\; a=2$$
$$\begin{pmatrix}-1\\a\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\3\\-2\end{pmatrix}=0+3a-2=0 \;\Rightarrow\; a=\frac{2}{3}$$

Diese beiden Bedingungen können nicht zugleich gelten, also gibt es keine Gerade, die senkrecht auf der Ebene steht.

d) α) Zeigen Sie, dass die Gerade h: $\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}+u\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ in E liegt.

Lösung:
zu zeigen ist: 1. der Orsvektor der Geraden h bzw. der Punkt (3/-2/1) liegt in der Ebene und 2. der Richtungsvektor der Geraden h ist linear abhängig von den Richtungsvektoren der Ebene.
zu 1.: mit x-2y-3z=4 und (3/-2/1) gilt: 3+4-3=4, d.h. der Punkt liegt in der Ebene.

zu 2.: $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=r\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}0\\3\\-2\end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{matrix}1=2r\\2=r+3s\\-1=-2s\end{matrix} \;\Rightarrow\; \begin{matrix}r=\frac{1}{2}\\ \\ s=\frac{1}{2}\end{matrix} \;\Rightarrow\; 2\overset{?}{=}\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{2}\overset{!}{=}2$

Die Bedingungen sind erfüllt, also liegt die Gerade h in der Ebene E.

β) Geben Sie die Gleichung einer beliebigen Ebene an, die die Ebene E in der Gerade h schneidet.

Lösung:
Als Lösung wählt man geeignet die Gleichung der Geraden h erweitert mit einem Richtungsvektor, der linear unabhängig von den Richtungsvektoren der Ebene E ist, z.B. $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ *wegen*

$\begin{vmatrix}2&0&1\\1&3&0\\0&-2&0\end{vmatrix}=-2\neq 0$ *Gleichung der gesuchten Ebene:* $\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}+u\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+v\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

e) Berechne Sie in Abhängigkeit von a die Koordinaten des Punktes der Geradenschar g_a, der dem 0-Punkt am nächsten ist, der also minimale Entfernung zum 0-Punkt hat.

Lösung:
Der Ortsvektor $\vec{r}$ *zu jedem Punkt der Geradenschar ist durch die Geradengleichung gegeben:*

$\vec{r}=\begin{pmatrix}1-t\\-2+t\cdot a\\1+t\end{pmatrix}$ *. Die Länge des Vektors beträgt* $\sqrt{(1-t)^2+(-2+t\cdot a)^2+(1+t)^2}=$

$\sqrt{1-2t+t^2+4-4\cdot t\cdot a+t^2\cdot a^2+1+2t+t^2}=\sqrt{6-4\cdot t\cdot a+2\cdot t^2+t^2\cdot a^2}$

Die kürzeste Länge erhält man, indem man das Minimum der Wurzel oder auch das Minimum des Arguments der Wurzel bestimmt:

$$f(t)=6-4at+2t^2+a^2t^2 \;\Rightarrow\; f'(t)=-4a+4t+2a^2t$$

$f'(t)=0=-4a+4t+2a^2t \;\Rightarrow\; t=\frac{4a}{4+2a^2}=\frac{2a}{2+a^2}$

$f''(t)=4+2a^2>0$ *für alle a, d.h. für* $t=\frac{2a}{2+a^2}$ *liegt ein Minimum des Abstandes vor.*

Durch Einsetzen erhält man den Ortsvektor $\vec{r}=\begin{pmatrix}1-t\\-2+t\cdot a\\1+t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-\frac{2a}{2+a^2}\\-2+\frac{2a^2}{2+a^2}\\1+\frac{2a}{2+a^2}\end{pmatrix}$ *und damit auch die*

Koordinaten des jeweiligen Punktes $\left(\frac{a^2-2a+2}{2+a^2}\,/\,\frac{-4}{2+a^2}\,/\,\frac{a^2+2a+2}{2+a^2}\right)$

f) α) Berechnen Sie die Schnittgerade der Ebene E mit der y-z-Ebene.

Lösung:

Alle Punkte der y-z-Ebene haben einen Ortsvektor der Art $\begin{pmatrix}0\\y\\z\end{pmatrix}$ *. Dieser Vektor wird in der Ebenengleichung eingesetzt:*

$$\begin{pmatrix}0\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}0\\3\\-2\end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{matrix}0=1+2r\\y=r+3s\\z=-1-2s\end{matrix} \;\Rightarrow\; \begin{matrix}r=-\frac{1}{2}\\y=-\frac{1}{2}+3s\\z=-1-2s\end{matrix} \;\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}0\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{2}+3s\\-1-2s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{2}\\-1\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}0\\3\\-2\end{pmatrix}$$

Dieses ist die gesuchte Geradengleichung.

β) Die Geraden der Geradenschar schneiden die x-y-Ebene so, dass die Schnittpunkte eine Gerade ergeben. Berechnen Sie die Gleichung dieser Geraden.

Lösung:

Ansatz: $\vec{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-1\\a\\1\end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{matrix}x=1-t\\y=-2+a\cdot t\\0=1+t\end{matrix} \;\Rightarrow\; t=-1 \;\Rightarrow\; \begin{matrix}x=1+1=2\\y=-2-a\end{matrix}$

Geradengleichung: $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\-2-a\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix}+a\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$

g) Berechnen Sie die Gleichung der Gerade, die in der Ebene E liegt, so, dass jeder Punkt der Gerade den y-Wert 4 besitzt.

Lösung:

Ansatz:

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}x\\4\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}0\\3\\-2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}x=1+2r\\4=r+3s\\z=-1-2s\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}r=\dfrac{x-1}{2}\\ \\ s=\dfrac{-1-z}{2}\end{matrix} \Rightarrow 4=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}-\frac{3z}{2} \Rightarrow$$

$$8=x-4-3z \Rightarrow x=12+3z \Rightarrow$$

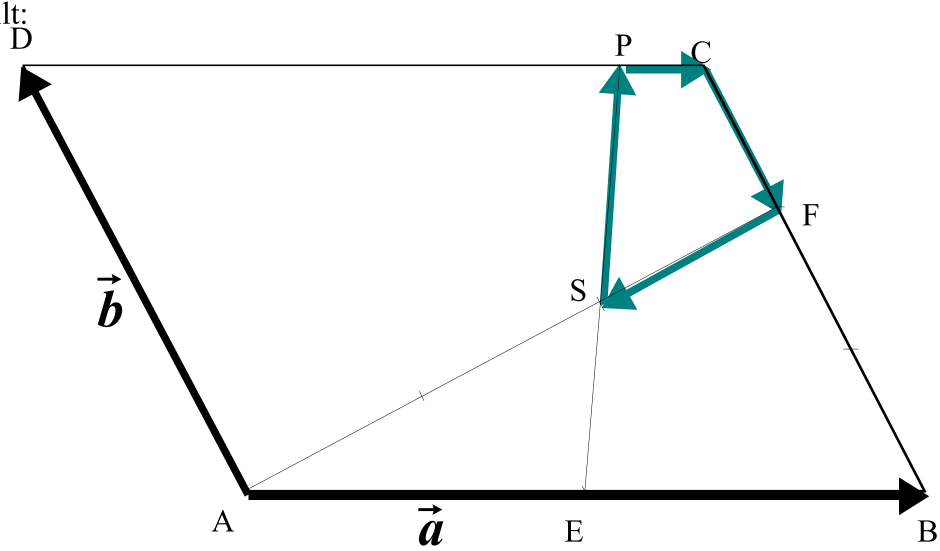
Geradengleichung: $\vec{x}=\begin{pmatrix}12+3z\\4\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\4\\0\end{pmatrix}+z\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$

2 In nebenstehender Figur gilt:

$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$
$\vec{b} = \overrightarrow{AD}$

E teilt AB wie 1:1
F teilt BC wie 2:1
S teilt AF wie 2:1

Berechnen Sie, wie P die Strecke $\overline{CD}$ teilt.



Lösung:
Betrachtet wird der geschlossene Streckenzug CFSPC.

$$\overrightarrow{CF} = \frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{CB} = \frac{1}{3}\cdot(-\vec{b}) = -\frac{1}{3}\cdot\vec{b}$$

$$\overrightarrow{FS} = \frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{FA} = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot(-\vec{b}) - \vec{a}\right) = -\frac{2}{9}\cdot\vec{b} - \frac{1}{3}\cdot\vec{a}$$

$$\overrightarrow{SP} = r\cdot\overrightarrow{ES} = r\cdot\left(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AS}\right) = r\cdot\left(-\frac{1}{2}\cdot\vec{a} + \frac{2}{3}\cdot\left(\vec{a} + \frac{2}{3}\cdot\vec{b}\right)\right) = r\cdot\left(\frac{1}{6}\cdot\vec{a} + \frac{4}{9}\cdot\vec{b}\right) = \frac{1}{6}\cdot r\cdot\vec{a} + \frac{4}{9}\cdot r\cdot\vec{b}$$

$$\overrightarrow{PC} = s\cdot\overrightarrow{DC} = s\cdot\vec{a}$$

Es gilt: $\overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FS} + \overrightarrow{SP} + \overrightarrow{PC} = \vec{0}$ *, also:*

$$-\frac{1}{3}\cdot\vec{b} - \frac{2}{9}\cdot\vec{b} - \frac{1}{3}\cdot\vec{a} + \frac{1}{6}\cdot r\cdot\vec{a} + \frac{4}{9}\cdot r\cdot\vec{b} + s\cdot\vec{a} = \vec{0} \;\Rightarrow$$

$$\vec{a}\cdot\underbrace{\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\cdot r + s\right)}_{=0} + \vec{b}\cdot\underbrace{\left(-\frac{1}{3} - \frac{2}{9} + \frac{4}{9}\cdot r\right)}_{=0} = \vec{0}$$

$$-\frac{1}{3} - \frac{2}{9} + \frac{4}{9}\cdot r = 0 \;\Rightarrow\; \frac{4}{9}\cdot r = \frac{5}{9} \;\Rightarrow\; r = \frac{5}{4} \;\Rightarrow\; -\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{4} + s = 0 \;\Rightarrow\; s = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$$

P teilt die Strecke $\overline{CD}$ *also im Verhältnis 1:7.*

---

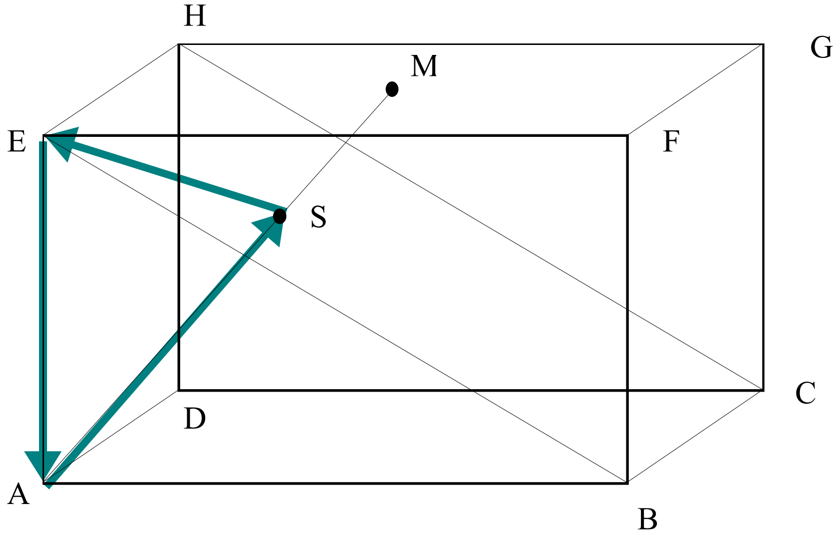
3 In untenstehendem Quader (nächste Seite) ist das Rechteck BCHE eingezeichnet. M befindet sich in der Mitte der oberen Quaderfläche EFGH.

Berechnen Sie, in welchem Verhältnis S die Strecke AM teilt.

Hilfe: Denken Sie daran, dass die Seitenkanten des Rechtecks BCHE das Rechteck vollständig definieren.

Benutzen Sie möglichst $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ $\quad \overrightarrow{AD} = \vec{b}$ $\quad \overrightarrow{AE} = \vec{c}$

Lösung:
geschlossener Streckenzug ASEA



$$\overrightarrow{AS}=r\cdot\overrightarrow{AM}=r\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\vec{a}+\frac{1}{2}\cdot\vec{b}+\vec{c}\right)$$
$$\overrightarrow{SE}=s\cdot\overrightarrow{CB}+t\cdot\overrightarrow{BE}=s\cdot(-\vec{b})+t\cdot(-\vec{a}+\vec{c})$$
$$\overrightarrow{EA}=-\vec{c}$$

$$\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{SE}+\overrightarrow{EA}=\vec{0}$$

$$r\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\vec{a}+\frac{1}{2}\cdot\vec{b}+\vec{c}\right)+s\cdot(-\vec{b})+t\cdot(-\vec{a}+\vec{c})-\vec{c}=\vec{0}$$
$$\vec{a}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{2}\cdot r-t\right)}_{=0}+\vec{b}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{2}\cdot r-s\right)}_{=0}+\vec{c}\cdot\underbrace{(r+t-1)}_{=0}=\vec{0}\ \Rightarrow$$
$$t=\frac{1}{2}\cdot r\ ;\ s=\frac{1}{2}\cdot r\ ;\ r+\frac{1}{2}\cdot r-1=0\ \Rightarrow\ \frac{3}{2}\cdot r=1\ \Rightarrow\ r=\frac{2}{3}\ \Rightarrow\ s=t=\frac{1}{3}$$

S teilt also die Strecke $\overline{AM}$ *wie 2:1.*

---

4 Begründen Sie, warum durch die Gleichung $\begin{pmatrix}4\\-2\\-8\end{pmatrix}\cdot\vec{x}=0$ eine Ebene definiert ist, deren Punkte durch den Vektor $\vec{x}$ dargestellt werden.

Lösung:
Alle Vektoren, die die Gleichung erfüllen, stehen senkrecht zum gegebenen Vektor (Skalarprodukt gleich 0).
Alle Vektoren, die senkrecht zu einem Vektor stehen, bilden aber eine Ebene.
Da der 0-Punkt auch mit zu den Vektoren $\vec{x}$ *gehört, geht diese Ebene durch den 0-Punkt.*

Man kann auch einfach rechnen: $\begin{pmatrix}4\\-2\\-8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=4x-2y-8z=0$ *, und das ist eine Ebenengleichung in Koordinatenform, wobei das =0 anzeigt, dass die Ebene durch den 0-Punkt geht.*

Viel Erfolg bei der Bearbeitung!