19.09.2003 Klausur 1 Kurs Ma23 Mathematik Lk

Lösung

1 Lösen Sie mit Hilfe von Determinanten folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{l} 3x-7y=5 \\ 8x+5y=2 \end{array} .$$

Lösung:

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 8 & 5 \end{vmatrix}=15-(-56)=71 \;;\; D_x=\begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=25-(-14)=39 \;;\; D_y=\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 2 \end{vmatrix}=6-40=-34$$

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{39}{71} \;;\; y=\frac{D_y}{D}=\frac{-34}{71}$$

---

2 Lösen Sie auf beliebigem Weg folgende Gleichungssysteme

a) $\begin{array}{ll} 2x-3y+5z-w=3 & (1) \\ 2x-2y-z-3w=5 & (2) \end{array}$ b) $\begin{array}{ll} 4x-y=9 & (1) \\ 2x+3y=1 & (2) \\ 8x+5y=11 & (3) \end{array}$.

Lösung:

a)

$$\left\{\begin{array}{ll} 2x-3y+5z-w=3 & (1) \\ y-6z-2w=2 & (3)=(2)-(1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} w=a \\ z=b \\ y=6b+2a+2 \\ x=\dfrac{3y-5b+a+3}{2}=\dfrac{18b+6a+6-5b+a+3}{2}=\dfrac{9+7a+13b}{2} \end{array}\right\}$$

Es gibt unendlich viele Lösungen mit beliebig zu wählendem a und b.

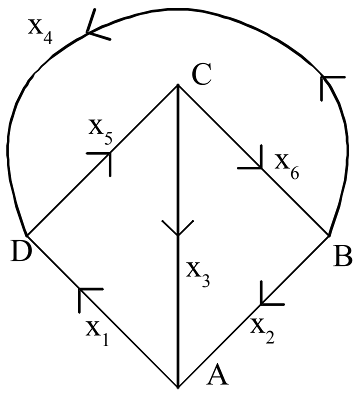
---

b) $\left\{\begin{array}{ll} 7y=-7 & (4)=2\cdot(2)-(1) \\ 7y=-7 & (5)=(3)-2\cdot(1)=(4) \end{array}\right\}$ *Es bleiben also nur die Gleichungen (1) und (4) übrig.*

Aus (4) ergibt sich $y=-1$ *und aus (1)* $4x-(-1)=9 \Rightarrow 4x=8 \Rightarrow x=2$

---

3 Nebenstehend sehen Sie ein geschlossenes schematisches Straßennetz, das nur aus Einbahnstraßen besteht.
Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, das den Verkehrsfluss auf diesen Straßen beschreibt.
Lösen Sie das Gleichungssystem und entscheiden Sie auf Grund ihrer Überlegungen und Rechnungen, ob die Straße x_5 zwischen D und C und die Straße x_2 zwischen B und A im Mittel gleich stark befahren sein können.



Lösung:

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{bei A:} & x_1=x_2+x_3 \\ \text{bei D:} & x_5=x_1+x_4 \\ \text{bei B:} & x_6=x_2+x_4 \\ \text{bei C:} & x_5=x_3+x_6 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{(1)-(2) \\ \text{dann } (2)+(3) \\ \text{dann } (3)+(4)}}{\Rightarrow}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{gathered} x_6=a \\ x_5=b \\ x_4=c \\ x_3=b-a \\ x_2=-x_3-c+b=-b+a-c+b=a-c \\ x_1=x_2+x_3=a-c+b-a=b-c \end{gathered}$$

Da alle Besetzungszahlen positiv sein müssen, gilt: a>0 , b>0 , c>0 , b>a , a>c , b>c , damit also b>a>c. Es sollen verglichen werden x_5 und x_2 , also b und a-c. Da b>a muss auf alle Fälle auch b>a-c gelten, also ist mit Sicherheit $x_5>x_2$, d.h. die beiden Straßen können nicht gleich stark befahren sein.

---

4 Gegeben ist das Gleichungssystem $\left\{ \begin{matrix} 2\cdot x-a\cdot y=5 \\ x+3\cdot y=b \end{matrix} \right\}$.

Berechnen Sie, für welche Werte von a und b das Gleichungssystem
a) keine,
b) genau eine,
c) unendlich viele Lösungen
besitzt.

Lösung:

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -a \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=6+a \quad ; \quad D_x=\begin{vmatrix} 5 & -a \\ b & 3 \end{vmatrix}=15+a\cdot b \quad ; \quad D_y=\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & b \end{vmatrix}=2\cdot b-5$$

1.Fall: Es existiert <u>keine</u> Lösung, wenn D=0 und D_x oder D_y ungleich 0 ist, d.h. wenn $a=-6$ *und* $b\neq\frac{5}{2}$.

2.Fall: Es existiert nur <u>eine</u> Lösung, wenn $a\neq-6$ *, da dann der Wert der Nennerdeterminante nicht 0 ist.*

3.Fall: Es existieren <u>unendlich</u> viele Lösungen, wenn alle Determinanten den Wert 0 haben, d.h. $a=-6$ *und* $b=\frac{5}{2}$.

---

5 Berechnen Sie mit Hilfe eines Gleichungssystems eine Lösung $(x_1;x_2;x_3;x_4)$ für folgende Reaktionsgleichung und suchen Sie dann die kleinstmöglichen positven ganzen Zahlen für diese x_i heraus.

$$x_1\cdot Ca+x_2\cdot H_3PO_4\rightarrow x_3\cdot Ca_3P_2O_8+x_4\cdot H_2$$

Lösung:

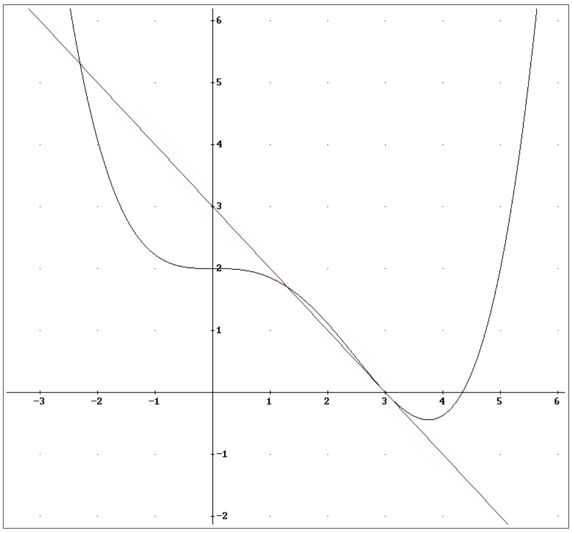
Bilanzen für die einzelnen Elemente:

$$\left\{ \begin{matrix} \text{Ca:} & x_1=3\cdot x_3 \\ \text{H:} & 3\cdot x_2=2\cdot x_4 \\ \text{P:} & x_2=2\cdot x_3 \\ \text{O:} & 4\cdot x_2=8\cdot x_3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -8 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{(1)\text{ bleibt} \\ (2)\text{ bleibt} \\ (2)-3\cdot(3) \\ 4\cdot(3)-(4)}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt: Das Gleichungssystem ist unterbestimmt. Für x_4 wird 3·t gesetzt.
Damit gilt: $6x_3=2\cdot 3t=6t$, also $x_3=t$. Und weiter: $3x_2=2\cdot 3t=6t$, also $x_2=2t$.
Und weiter: $x_1=3\cdot x_3=3\cdot t$.
Es ergibt sich also die Lösung (3t / 2t / t / 3t) Mit dem kleinsten sinnvollen t, nämlich t=1 ergibt sich

$$3\cdot Ca+2\cdot H_3PO_4\rightarrow Ca_3P_2O_8+3\cdot H_2$$

6 Der Graph besitzt im ganzzahligen y-Achsenabschnitt einen Sattelpunkt und eine ganzzahlige Nullstelle, in der die Tangente eingezeichnet ist.
Die zugehörige Funktionsgleichung hat den Grad 4.
Berechnen Sie auf Grund dieser Angaben und mit Hilfe des Graphen die Funktionsgleichung der Kurve.



Lösung:
Folgende Eigenschaften liest man aus dem Graphen ab:
y-Achsenabschnitt im Punkt (0/2), d.h. $f(0)=2$
Sattelpunkt, d.h. waagrechte Tangente und Wendepunkt in (0/2): $f'(0)=0$ *und* $f''(0)=0$
Nullstelle in (3/0): $f(3)=0$
Steigung -1 in (3/0): $f'(3)=-1$
Kurve 4.Grades: $f(x)=a\cdot x^4+b\cdot x^3+c\cdot x^2+d\cdot x+e$
$f'(x)=4\cdot a\cdot x^3+3\cdot b\cdot x^2+2\cdot c\cdot x+d$
$f''(x)=12\cdot a\cdot x^2+6\cdot b\cdot x+2\cdot c$
Es ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\left\{\begin{array}{cc} f(0)=2 & e=2 \\ f'(0)=0 & d=0 \\ f''(0)=0 & 2c=0 \\ f(3)=0 & 81\cdot a+27\cdot b+9\cdot c+3\cdot d+e=0 \\ f'(3)=-1 & 108\cdot a+27\cdot b+6\cdot c+d=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 81\cdot a+27\cdot b+2=0 \\ 108\cdot a+27\cdot b=-1 \end{array}\right\} \overset{\text{subtrahieren}}{\Rightarrow}$$

$$27\cdot a-2=-1 \Rightarrow 27\cdot a=1 \Rightarrow a=\frac{1}{27} \Rightarrow 81\cdot\frac{1}{27}+27\cdot b+2=0 \Rightarrow 27\cdot b=-5 \Rightarrow b=\frac{-5}{27}$$

Die gesuchte Funktionsgleichung ist also $f(x)=\frac{1}{27}\cdot x^4-\frac{5}{27}\cdot x^3+2$

---

7 Berechnen Sie, für welchen a-Wert der Vektor $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ durch die Vektoren $\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}3\\1\\a\end{pmatrix}$ durch Linearkombination darstellbar ist.

Lösung:

$$r\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$$

Aus den ersten beiden Komponenten jedes Vektors ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

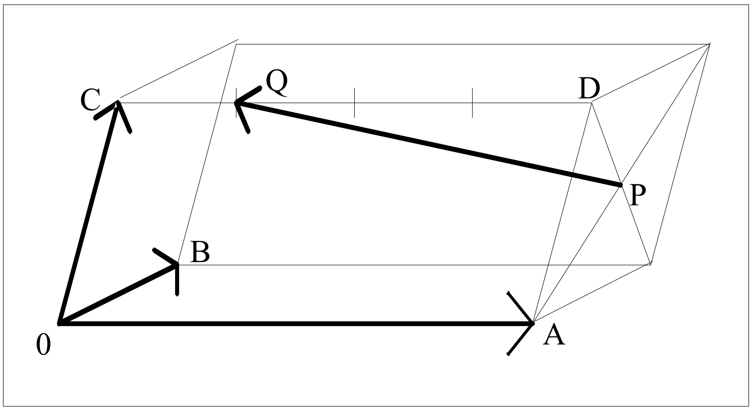
$$\left\{\begin{array}{l} r+3s=2 \\ -r+s=1 \end{array}\right\} \overset{\text{addieren}}{\Rightarrow} 4s=3 \Rightarrow s=\frac{3}{4} \Rightarrow -r+\frac{3}{4}=1 \Rightarrow r=-\frac{1}{4}$$

Für die dritte Komponente gilt dann: $2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{3}{4}\cdot a=-1 \Rightarrow \frac{3}{4}\cdot a=-\frac{1}{2} \Rightarrow a=-\frac{2}{3}$

Für $a=-\frac{2}{3}$ *ist also die gewünschte Linearkombination vorhanden.*

8 In nebenstehender Figur ist die Seite CD des Parallelflachs in 4 gleiche Teile geteilt. Einer der Teilpunkte ist Q. Die Diagonalen der rechten Seitenfläche schneiden sich in P.

Beschreiben Sie mit Hilfe der Vektoren, die von 0 nach A, von 0 nach B und von 0 nach C laufen, den Vektor, der von P nach Q zeigt.



Lösung:

Mit $\vec{a}=\overrightarrow{0A}$ $\quad \vec{b}=\overrightarrow{0B}$ $\quad \vec{c}=\overrightarrow{0C}$ *gilt:*

Es gilt: $$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{A0}+\overrightarrow{0C}+\overrightarrow{CQ}=\left(-\frac{1}{2}\cdot\vec{b}-\frac{1}{2}\cdot\vec{c}\right)-\vec{a}+\vec{c}+\frac{1}{4}\cdot\vec{a}=-\frac{3}{4}\cdot\vec{a}-\frac{1}{2}\cdot\vec{b}+\frac{1}{2}\cdot\vec{c}$$

---

9 Gegeben ist eine Menge, die Elemente der Form $(a_1;a_2)$ enthält, für die eine Verknüpfung + definiert ist. Zeigen Sie, dass mit den Verknüpfungen in beiden Teilaufgaben kein Vektorraum vorliegt. Geben Sie sämtliche Bedingungen an, die gegen einen Vektorraum sprechen. Untersuchen Sie in jedem Fall ausführlich die Existenz des neutralen und inversen Elementes.

Definition 1: Es sei V eine Menge und + eine Verknüpfung in V; je zwei Elementen $\vec{a},\vec{b}\in V$ sei also ein Element $\vec{a}+\vec{b}\in V$ zugeordnet, welches wir die Summe von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ nennen. Dabei sollen folgende Gesetze gelten:

(1) Für alle $\vec{a},\vec{b}\in V$ gilt $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (Kommutativgesetz).
(2) Für alle $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in V$ gilt $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (Assoziativgesetz).
(3) Es gibt ein $\vec{o}\in V$ mit $\vec{a}+\vec{o}=\vec{a}$ für alle $\vec{a}\in V$ (Neutrales Element).
(4) Zu jedem $\vec{a}\in V$ existiert ein $\vec{a}'\in V$ mit $\vec{a}+\vec{a}'=\vec{o}$ (Inverses Element).

Ferner ist jedem Paar $(r;\vec{a})$ mit $r\in\mathbb{R}$ und $\vec{a}\in V$ ein Element aus V zugeordnet, welches wir mit $r\vec{a}$ bezeichnen und das r-fache von $\vec{a}$ nennen. Dabei sollen folgende Gesetze gelten:

(5) Für alle $r,s\in\mathbb{R}$ und alle $\vec{a}\in V$ gilt $(rs)\vec{a}=r(s\vec{a})$.
(6) Für alle $r\in\mathbb{R}$ und alle $\vec{a},\vec{b}\in V$ gilt $r(\vec{a}+\vec{b})=r\vec{a}+r\vec{b}$.
(7) Für alle $r,s\in\mathbb{R}$ und alle $\vec{a}\in V$ gilt $(r+s)\vec{a}=r\vec{a}+s\vec{a}$.
(8) Für alle $\vec{a}\in V$ gilt $1\vec{a}=\vec{a}$.

Dann heißt V ein **Vektorraum**. Die Elemente von V heißen **Vektoren**.

a) $(a_1;a_2)+(b_1;b_2)=(a_1\cdot b_2;-a_2\cdot b_1)$

Lösung:

neutrales Element: $(a_1;a_2)+(n_1;n_2)=(a_1;a_2) \Rightarrow \left|\begin{matrix} a_1\cdot n_2=a_1 \\ -a_2\cdot n_1=a_2 \end{matrix}\right| \Rightarrow (n_1;n_2)=(-1;1)$

inverses Element: $(a_1;a_2)+(i_1;i_2)=(-1;1) \Rightarrow \left|\begin{matrix} a_1\cdot i_2=-1 \\ -a_2\cdot i_1=1 \end{matrix}\right| \Rightarrow \left|\begin{matrix} i_2=-\dfrac{1}{a_1} \\ i_1=-\dfrac{1}{a_2} \end{matrix}\right|$

Nur für die Elemente, für die sowohl a_1 als auch a_2 nicht 0 sind, gibt es ein inverses Element. Gefordert ist aber das inverse Element für alle Elemente. Also liegt kein Vektorraum vor.

Weiter sind folgende Bedingungen verletzt (angegeben wird jeweils ein Gegenbeispiel):
Kommutativgesetz: (1;2)+(3;4)=(4;-6) (3;4)+(1;2)=(6;-4)
Assoziativgesetz: ((1;2)+(3;4))+(5;6)=(4;-6)+(5;6)=(24;30)
(1;2)+((3;4)+(5;6))=(1;2)+(18;-20)=(-20;-36)

Regel (6): $r\cdot((a_1;a_2)+(b_1;b_2))\stackrel{?}{=}r\cdot(a_1;a_2)+r\cdot(b_1;b_2)$

Gegenbeispiel: $2\cdot((1;2)+(3;4))=2\cdot(4;-6)=(8;-12)$

$2\cdot(1;2)+2\cdot(3;4)=(2;4)+(6;8)=(16;-24)$

Regel (7): $(r+s)\cdot(a_1;a_2)\stackrel{?}{=}r\cdot(a_1;a_2)+s\cdot(a_1;a_2)$

Gegenbeispiel: $(3+4)\cdot(1;2)=7\cdot(1;2)=(7;14)$

$3\cdot(1;2)+4\cdot(1;2)=(3;6)+(4;8)=(24;-24)$

---

b) $(a_1;a_2)+(b_1;b_2)=(MW(a_1,b_1);MW(a_2,b_2))$, wobei MW(a,b) den Mittelwert (arithmetisches Mittel) von a und b bedeutet.

Lösung:

neutrales Element: $(a_1;a_2)+(n_1;n_2)=(a_1;a_2) \Rightarrow \begin{Bmatrix} MW(a_1;n_1)=a_1 & \Rightarrow & n_1=a_1 \\ MW(a_2;n_2)=a_2 & \Rightarrow & n_2=a_2 \end{Bmatrix}$

Da es also nicht ein einziges neutrales Element für alle Elemente der Menge gibt, liegt kein Vektorraum vor.
Da es kein neutrales Element gibt, erübrigt sich die Untersuchung zum inversen Element.
Weiter ist folgende Bedingung verletzt:

Assoziativgesetz: ((2;2)+(6;6))+(10,10)=(4;4)+(10;10)=(7;7)
(2;2)+((6;6)+(10,10))=(2;2)+(8;8)=(5;5)

Regel (7): $(r+s)\cdot(a_1;a_2)\stackrel{?}{=}r\cdot(a_1;a_2)+s\cdot(a_1;a_2)$

Gegenbeispiel: $(3+4)\cdot(1;2)=7\cdot(1;2)=(7;14)$

$3\cdot(1;2)+4\cdot(1;2)=(3;6)+(4;8)=(3{,}5;7)$

Viel Erfolg bei der Bearbeitung!