Thema: Vektorrechnung - Geradenschar und Kugelschar

Gegeben sind eine Geradenschar g_a und eine Kugelschar k_a durch

$$g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1-a \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad k_a: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ -a \end{pmatrix} \right)^2 = 3 \quad \text{mit} \quad a \in \mathbb{R}.$$

Berechnen Sie bei den folgenden Aufgaben immer alle Lösungen.

1 Für diesen Aufgabenteil ist der Parameter der Geradenschar identisch mit dem Parameter der Kugelschar.
Berechnen Sie das a, für das der Mittelpunkt der Kugel k_a auf g_a liegt.

Ansatz: Ortsvektor zum Kugelmittelpunkt in die Geradengleichung einsetzen:

$$\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1-a \\ -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} a = 1+s \\ 1 = 2+s-a \cdot s \\ -a = 0-2 \cdot s \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \\ \\ a = 2 \cdot s \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 2 \cdot s = 1+s \rightarrow s=1 \\ \\ \\ \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \\ \\ a=2 \end{matrix}$$

Überprüfen in der mittleren Gleichung: $2+s-a \cdot s = 2+1-2 \cdot 1 = 1$ ✔
Für a=2 liegt also der Nullpunkt auf der Kugeloberfläche.

2 Eine zur Geraden g_3 senkrechte Ebene ist Tangentialebene an der Kugel k_3.
Bestimmen Sie die Ebenengleichung dieser Tangentialebene.

$$g_3: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1-3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$ Der Richtungsvektor ist Normalenvektor zur senkrechten Ebene.

Bestimmung des Normaleneinheitsvektors: $\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2} = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3$

Hessesche Normalenform der Ebene: $E_g: \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - c = 0$.

Ansatz: Abstand Mittelpunkt von k_3 zur Ebene ist $\sqrt{3}$:

$$E_g: \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} - c = \pm\sqrt{3} \rightarrow 1 - \frac{2}{3} + 2 - c = \pm\sqrt{3} \rightarrow \frac{7}{3} - c = \pm\sqrt{3} \rightarrow c = \frac{7}{3} \mp \sqrt{3}$$

Gesuchte Ebenengleichungen der zwei Tangentialebenen sind $E_{g_{1,2}}: \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - \frac{7}{3} \pm \sqrt{3} = 0$

3 Jede Gerade g_a der Geradenschar schneidet die x-y-Ebene in einem Punkt A und die y-z-Ebene in einem Punkt B.
Berechnen Sie das a, für das der Abstand $\overline{AB}$ minimal wird.

Ansatz für Schnitt mit x-y-Ebene: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1-a \\ -2 \end{pmatrix}$

Wegen Gleichung 3 ist s=0. Daraus folgt: A besitzt die Koordinaten A(1/2/0).

Ansatz für Schnitt mit y-z-Ebene: $\begin{pmatrix}0\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\1-a\\-2\end{pmatrix}$

Wegen Gleichung 1 ist s = -1. Daraus folgt $y=2-1+a=1+a$ und $z=0-1\cdot(-2)=+2$.
Als besitzt B die Koordinaten B(0/1+a/2).

Abstand $\overline{AB}$, also Länge L(a) des Vektors $\overrightarrow{AB}$ berechnen:

$$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{0B}-\overrightarrow{0A}|=\left|\begin{pmatrix}0\\1+a\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}-1\\-1+a\\2\end{pmatrix}\right|=\sqrt{(-1)^2+(-1+a)^2+2^2}=\sqrt{1+1-2a+a^2+4}=\sqrt{a^2-2a+6}=L(a)$$

Die Länge soll minimal werden, also L'(a) bilden (Kettenregel) und gleich 0 setzen:

$$L'(a)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{a^2-2a+6}}\cdot(2a-2)\overset{!}{=}0 \rightarrow 2a-2=0 \rightarrow a=1$$

Mit sehr kleinem $\varepsilon>0$ gilt $L'(1-\varepsilon)<0$ und $L'(1+\varepsilon)>0$, es liegt also ein Minimum vor.

4 Zwei Kugeln der Kugelschar enthalten den Koordinatenursprung.
Berechnen sie die Koordinaten der Mittelpunkte und die Radien der Kreise, die von diesen Kugeln aus der x-y-Ebene ausgeschnitten werden.

Berechnung der Kugelgleichungen mit folgendem Ansatz: P(0/0/0) in Kugelgleichung einsetzen:

$$\left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a\\1\\-a\end{pmatrix}\right)^2=3 \rightarrow a^2+1^2+a^2=3 \rightarrow 2a^2=2 \rightarrow a^2=1 \rightarrow a=\pm 1$$

Die Kugelmittelpunkte haben also die Koordinaten M_1(1/1/-1) und M_2(-1/1/1).
Die zugehörigen Schnittkreise in der x-y-Ebene haben die z-Komponente z=0.
Die Koordinaten der Kreismittelpunkte M^*_1 und M^*_2 sind also M^*_1(1/1/0) und M^*_2(-1/1/0).

Aus der Zeichnung für k_1 sieht man:
Abstand des Mittelpunktes zur x-y-Ebene ist 1.
Abstand vom Mittelpunkt zum Nullpunkt ist $R=\sqrt{3}$.
Für den Radius r des Kreises ergibt sich dann mit dem Satz des Pythagoras:
$r=\sqrt{R^2-1^2}=\sqrt{3-1}=\sqrt{2}$

Die beiden Kugeln liegen symmetrisch zur y-z-Ebene. Auch für die zweite Kugel beträgt deshalb der Radius des Kreises in der x-y-Ebene $\sqrt{3}$.