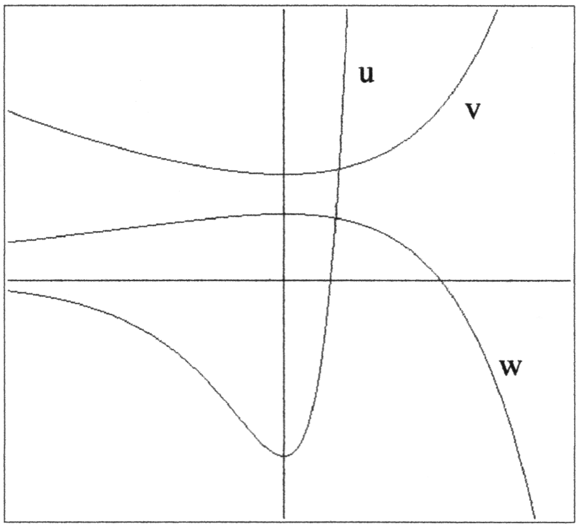
# Thema: Analysis - Funktionsschar mit e-Funktion

Gegeben ist die Funktionsschar mit der Gleichung $f_a(x)=e^{a\cdot x}-a\cdot e^x$




1 Zeigen Sie, dass die Nullstellen der Kurven der Funktionsschar jeweils bei $x=\frac{\ln a}{a-1}$ liegen.

Bedingung für Nullstellen ist $f_a(x)=0$ :

$e^{a\cdot x}-a\cdot e^x=0 \rightarrow e^{a\cdot x}=a\cdot e^x \xrightarrow{:e^x} e^{(a-1)\cdot x}=a \rightarrow$

$(a-1)\cdot x=\ln a \rightarrow x=\frac{\ln a}{a-1}$ was zu zeigen war

Untersuchen Sie, für welche a-Werte es Nullstellen gibt.

Wegen $\ln a$ muss gelten $a>0$ und wegen $a-1$ im Nenner muss gelten $a\neq 1$ .

An den Grenzen der gefundenen Bereiche gibt es a-Werte, für die der Graph der Funktion jeweils eine besondere Eigenschaft hat.
Untersuchen Sie diese Graphen auf diese Eigenschaft hin.

Für $a=0$ gilt $f_0(x)=e^{0\cdot x}-0\cdot e^x=e^0=1$ . Der Graph ist also eine Parallele zur x-Achse im Abstand 1.

Für $a=1$ gilt $f_1(x)=e^{1\cdot x}-1\cdot e^x=e^x-e^x=0$ . Der Graph ist also identisch zur x-Achse.

2 In der Skizze sind die Graphen u, v und w für die drei a-Werte $-\frac{1}{5}$, $\frac{1}{4}$ und 3 gezeichnet.
Ordnen Sie den drei Graphen diese Zahlenwerte mit Begründung zu.

Der Graph v ist ohne Nullstelle. Deshalb gehört er zum Wert $a=-\frac{1}{5}$ (wegen a<0).

$f_{\frac{1}{4}}(0)=e^{\frac{0}{4}}-\frac{1}{4}\cdot e^0=e^0-\frac{1}{4}\cdot e^0=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ ; $f_3(0)=e^{3\cdot 0}-3\cdot e^0=e^0-3\cdot e^0=1-3=-2$

Zu $a=\frac{1}{4}$ gehört Graph w, da der y-Achsenabschnitt dieses Graphen positiv ist.

Zu $a=3$ gehört Graph u, da der y-Achsenabschnitt dieses Graphen negativ ist.

3 Einige Graphen der Schar schließen mit der x-Achse im Bereich negativer x-Werte eine Fläche mit endlichem Inhalt ein.
Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt der Fläche, die ein solcher Graph der Schar mit der x-Achse zwischen $-\infty$ und 0 einschließt, gleich $\frac{1}{a}-a$ ist.

Uneigentliches Integral: $\int_{-\infty}^{0}\left(e^{a\cdot x}-a\cdot e^{x}\right)dx=\int_{-\infty}^{0}e^{a\cdot x}dx-a\cdot\int_{-\infty}^{0}e^{x}\,dx=\lim_{z\to-\infty}\left[\frac{1}{a}\cdot e^{a\cdot x}-a\cdot e^{x}\right]_{z}^{0}=$

$\lim_{z\to-\infty}\left(\left(\frac{1}{a}\cdot e^{a\cdot 0}-a\cdot e^{0}\right)-\left(\frac{1}{a}\cdot e^{a\cdot z}-a\cdot e^{z}\right)\right)=()-(0-0)=\frac{1}{a}-a$ was zu zeigen war

Berechnen Sie, welche Beziehung zwischen a und b ( mit $a\neq b$ ) bei den Funktionen $f_a$ und $f_b$ bestehen muss, damit diese Flächen gleich groß sind.

Ansatz für gleiche Flächeninhalte:

$\frac{1}{a}-a=\frac{1}{b}-b\xrightarrow{+a-\frac{1}{b}}\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=a-b\rightarrow\frac{b-a}{a\cdot b}=a-b=-(b-a)\xrightarrow{:(b-a)}\frac{1}{a\cdot b}=-1\rightarrow a\cdot b=-1$

Wenn das Produkt der beiden Parameter a und b = -1 ist, sind die Flächeninhalte der zugehörigen Graphen gleich groß.

4 Berechnen Sie die Orte aller derjenigen Punkte, an denen die Kurven der Kurvenschar waagrechte Tangenten haben. Beachten Sie dabei auch Sonderfälle.

1. Ableitung: $f_a'(x)=a\cdot e^{a\cdot x}-a\cdot e^{x}$

Nullsetzen des Terms: $a\cdot e^{a\cdot x}-a\cdot e^{x}=0\rightarrow a\cdot e^{a\cdot x}=a\cdot e^{x}\rightarrow e^{a\cdot x}=e^{x}\rightarrow a\cdot x=x\xrightarrow{a\,beliebig}x=0$
Generell gilt also, dass die Graphen der Schar bei x=0, also auf der y-Achse, waagrechte Tangenten besitzen.
$f_a(0)=e^{a\cdot 0}-a\cdot e^{0}=1-a$ Die waagrechten Tangenten sind also in den Punkten $(0/1-a)$ zu finden.

Sonderfälle: $a=0$ und $a=1$ Diese Fälle wurden schon unter Aufgabe 1 behandelt. Es handelt sich um zwei Geraden, die parallel zur x-Achse verlaufen. In allen Punkten haben diese Geraden deshalb eine waagrechte Tangente.