# Thema: Vektorrechnung - Geradenschar und Ebenenschar

Gegeben sind die Geradenschar $g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2a-1 \\ -3a+2 \\ 1 \end{pmatrix}$

und die Ebenenschar $E_b: \begin{pmatrix} b \\ 2 \\ -2b \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 14 = 0$ .

Geben Sie bei den folgenden Aufgaben immer alle Lösungen an!

1 Es gibt nur ein a und ein b, für die eine Gerade der Geradenschar $g_a$ senkrecht zu einer Ebene der Ebenenschar $E_b$ steht. Berechnen Sie diesen a- und diesen b-Wert.

Der Normalenvektor der Ebene steht senkrecht auf der Ebene. Falls der Richtungsvektor einer Geraden also parallel zum Ebenenvektor steht, verläuft die Gerade senkrecht zur Ebene. Ansatz: Richtungsvektor ist Vielfaches vom Normalenvektor:

$$\begin{pmatrix} 2a-1 \\ -3a+2 \\ 1 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} b \\ 2 \\ -2b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 2a-1 = t \cdot b \\ -3a+2 = 2 \cdot t \\ 1 = -2b \cdot t \end{matrix} \rightarrow t = \frac{-1}{2b} \rightarrow \begin{matrix} 2a-1 = -\frac{1}{2} \\ -3a+2 = -\frac{1}{b} \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} a = \frac{1}{4} \\ \end{matrix} \rightarrow b = -\frac{4}{5}$$

Als einzige Lösung ergibt sich, dass $g_{\frac{1}{4}}$ und $E_{-\frac{4}{5}}$ senkrecht zueinander stehen.

2 Eine Kugel k mit dem Mittelpunkt M(a/2a/3a) und dem Radius r=2 berührt die Ebene $E_3$. Berechnen Sie den Wert a.

Ansatz: M muss von der Ebene $E_3$ den Abstand 2 haben.

Hessesche Normalenform von $E_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 14 = 0$ aufstellen: $\sqrt{3^2+2^2+(-6)^2} = \sqrt{9+4+36} = \sqrt{49} = 7$

Der Normalenvektor hat also die Länge 7. $\frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 2 = 0$ ist also die Hessesche Normalenform.

Koordinaten von M einsetzen und a berechnen:

$$\frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 3a \end{pmatrix} - 2 = \frac{1}{7} \cdot (3a + 4a - 18a) - 2 = \frac{1}{7} \cdot (-11a) - 2 = -\frac{11}{7} \cdot a - 2 \stackrel{!}{=} \pm 2$$

1. Lösung: $-\frac{11}{7} \cdot a - 2 = +2 \rightarrow -\frac{11}{7} \cdot a = 4 \rightarrow a = -\frac{28}{11}$

2. Lösung: $-\frac{11}{7} \cdot a - 2 = -2 \rightarrow -\frac{11}{7} \cdot a = 0 \rightarrow a = 0$

3 Es gibt eine Gerade h, die zu jeder Ebene der Ebenenschar $E_b$ gehört.
Berechnen Sie die Geradengleichung dieser Gerade h.

Ansatz: Da es eine solche Gerade h gibt, ist die Schnittgerade zweier beliebiger Ebenen diese Gerade. Zur Berechnung werden die Ebenen $E_0$ und $E_1$ gewählt.

$$E_0: \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 14 = 0 \;\; ; E_1: \begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 14 = 0$$

Umwandeln der Ebene $E_1$ in Koordinatenform: Man sieht sehr leicht, dass die Vektoren $\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ senkrecht zum Normalenvektor $\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$ stehen und dass $\begin{pmatrix}0\\7\\0\end{pmatrix}$ ein Ortsvektor zu einem Punkt der Ebene ist. Damit wird $E_1$ durch $E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\7\\0\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ beschrieben.

Einsetzen in die Ebenengleichung $E_0$:

$$E_b: \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} \cdot \left( \begin{pmatrix}0\\7\\0\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \right) - 14 = 14 + 2r + 2s - 14 = 2r + 2s = 0 \;\rightarrow\; r = -s$$

Einsetzen in die Koordinatengleichung von $E_1$:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\7\\0\end{pmatrix} - s \cdot \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\7\\0\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$$

Also ist $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\7\\0\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ die Gleichung der gesuchten Gerade.

4 Die Ebenen der Ebenenschar $E_b$ schneiden die x-y-Ebene jeweils in einer Geraden.
Diese Geraden bilden zusammen eine Geradenschar. Berechnen Sie die Gleichung dieser Geradenschar in vektorieller Darstellung.

Da es sich um Geraden in der x-y-Ebene handelt, muss die z-Komponente gleich 0 sein.

$$E_b: \begin{pmatrix}b\\2\\-2b\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix} - 14 = 0 \;\rightarrow\; b \cdot x + 2 \cdot y - 14 = 0$$

Es liegt eine Geradenschar mit dem Parameter b vor.

Man sieht leicht, dass (0/7) ein Punkt der Geraden ist. Richtungsvektor ist $\begin{pmatrix}-2\\b\end{pmatrix}$.

Damit gilt im 3-dim-Raum die Geradengleichung $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\7\\0\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-2\\b\\0\end{pmatrix}$.