Thema: Analysis - Relationen

Gegeben ist die Relation mit der Gleichung $x^2-4y^2+4y^4=0$.

1 Zeigen Sie, dass die oben stehende Relationsgleichung und die folgende Parameterdarstellung identische Graphen haben müssen.

$$x(t)=2\cdot\sin t\cdot\cos t$$
$$y(t)=\sin t$$

Zum Nachweis werden die Parametergleichungen in die gegebene Relationsgleichung eingesetzt:

$(2\cdot\sin t\cdot\cos t)^2-4\cdot(\sin t)^2+4\cdot(\sin t)^4 \;=\; 4\cdot\sin^2 t\cdot\cos^2 t-4\cdot\sin^2 t+4\sin^2 t\cdot\sin^2 t \;=$

$4\cdot\sin^2 t\cdot(\cos^2 t+\sin^2 t)-4\sin^2 t \;=\; 4\cdot\sin^2 t\cdot 1-4\cdot\sin^2 t \;=\; 4\cdot\sin^2 t-4\cdot\sin^2 t \;=\; 0$ was zu zeigen war

2 Untersuchen Sie die Kurve auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, waagrechte und senkrechte Tangenten (mit Koordinaten), auf das Steigungsverhalten im Koordinaten-Ursprung und auf Symmetrien. Zeichnen Sie dann den Graph.

Schnitte mit den Achsen:

x-Achse: Bedingung $y=0 \;\rightarrow\; x^2-4\cdot 0+4\cdot 0=0 \;\rightarrow\; x^2=0 \;\rightarrow$ doppelte Nullstelle bei $(0/0)$.

y-Achse: Bedingung $x=0 \;\rightarrow\; 0-4\cdot y^2+4\cdot y^4=0 \;\rightarrow\; 4\cdot y^2\cdot(y^2-1)=0 \;\rightarrow\; y_{1,2}=0 \;;\; y_3=1 \;;\; y_4=-1$

also doppelter Schnittpunkt bei $(0/0)$ und einfache Schnittpunkte bei $(0/1)$ und bei $(0/-1)$.

waagrechte Tangenten: Bedingung ist $y'=0$

$y'=\cos t\overset{!}{=}0 \;\rightarrow\; t=\frac{\pi}{2}+n\cdot\pi$

Koordinaten: $x\left(\frac{\pi}{2}+n\cdot\pi\right)=2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}+n\cdot\pi\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}+n\cdot\pi\right)=2\cdot(\pm 1)\cdot 0=0$

$y\left(\frac{\pi}{2}+n\cdot\pi\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+n\cdot\pi\right)=\pm 1$

Also liegen waagrechte Tangenten in den Punkten (0/1) und (0/-1) vor.

senkrechte Tangenten: Bedingung ist $x'=0$

$x'\overset{\text{Produktregel}}{=}2\cdot\cos^2 t-2\cdot\sin^2 t\overset{!}{=}0 \;\rightarrow\; \cos^2 t=\sin^2 t=1-\cos^2 t \;\rightarrow\; 2\cdot\cos^2 t=1 \;\rightarrow\; \cos^2 t=\frac{1}{2} \;\rightarrow$

$\cos t=\pm\sqrt{\frac{1}{2}} \;\rightarrow\; t=\arccos\left(\pm\sqrt{\frac{1}{2}}\right)=\frac{\pi}{4}+n\cdot\frac{\pi}{2}$

Koordinaten: $x\left(\frac{\pi}{4}+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)=2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)=2\cdot\left(\pm\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\right)\cdot\left(\pm\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\right)=\pm 1$

$y\left(\frac{\pi}{4}+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\pm\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$

Also liegen senkrechte Tangenten in den Punkten $\left(1/\pm\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\right)$ und $\left(-1/\pm\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\right)$.

Steigung im Punkt (0/0): Ansatz: $y=m\cdot x$

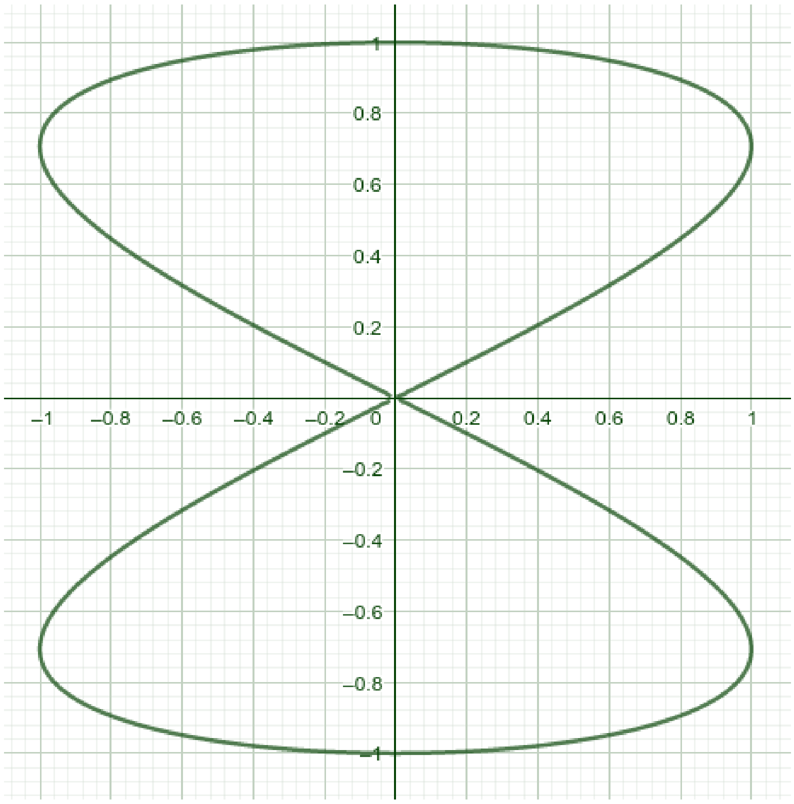
Einsetzen in Relationsgleichung: $x^2-4\cdot m^2\cdot x^2+4\cdot m^4\cdot x^4=0$

Auflösen nach m: $x^2-4\cdot m^2\cdot x^2+4\cdot m^4\cdot x^4=x^2\cdot(1-4\cdot m^2+4\cdot m^4\cdot x^2)=0$

Klammer gleich 0 setzen: $1-4\cdot m^2+4\cdot m^4\cdot x^2 \overset{\lim_{x\to 0}}{=} 1-4\cdot m^2\overset{!}{=}0 \;\rightarrow\; m^2=\frac{1}{4} \;\rightarrow\; m_{1,2}=\pm\frac{1}{2}$

Symmetrie: Wegen der geraden Hochzahlen Achsensymmetrie zur x-Achse und zur y-Achse.

Graph:



3 Zeigen Sie rechnerisch mit der Substitution $z=\cos t$, dass $\int \sin^3 t\, dt = -\cos t + \frac{\cos^3 t}{3}$.

Substitution: $z=\cos t \rightarrow \frac{dz}{dt} = -\sin t \rightarrow dt = -\frac{1}{\sin t}\cdot dz$

Integrand vereinfachen: $\int \sin^3 t\, dt = \int (1-\cos^2 t)\cdot \sin t\, dt = \int (1-z^2)\cdot \sin t \cdot \left(-\frac{1}{\sin t}\right) dz = \int (-1+z^2)\, dz$

Integration: $\int (-1+z^2)\, dz = -z + \frac{z^3}{3} = -\cos t + \frac{\cos^3 t}{3}$ was zu zeigen war

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von der Kurve vollständig umschlossen wird.

Leibnizsche Sektorformel: $A_{Sektor} = \frac{1}{2}\cdot \int_a^b (x(t)\cdot y'(t) - y(t)\cdot x'(t))\, dt$

Ansatz: Wegen der Symmetrie wird nur die halbe Fläche berechnet. Vom Nullpunkt für t=0 ausgehend erreicht die Kurve den Nullpunkt zum zweiten Mal für t = π. Daraus folgt

$$A = 2\cdot \frac{1}{2}\cdot \int_0^\pi ((2\cdot \sin t \cdot \cos t)\cdot \cos t - \sin t \cdot (2\cos^2 t - 2\cdot \sin^2 t))\, dt \ =$$

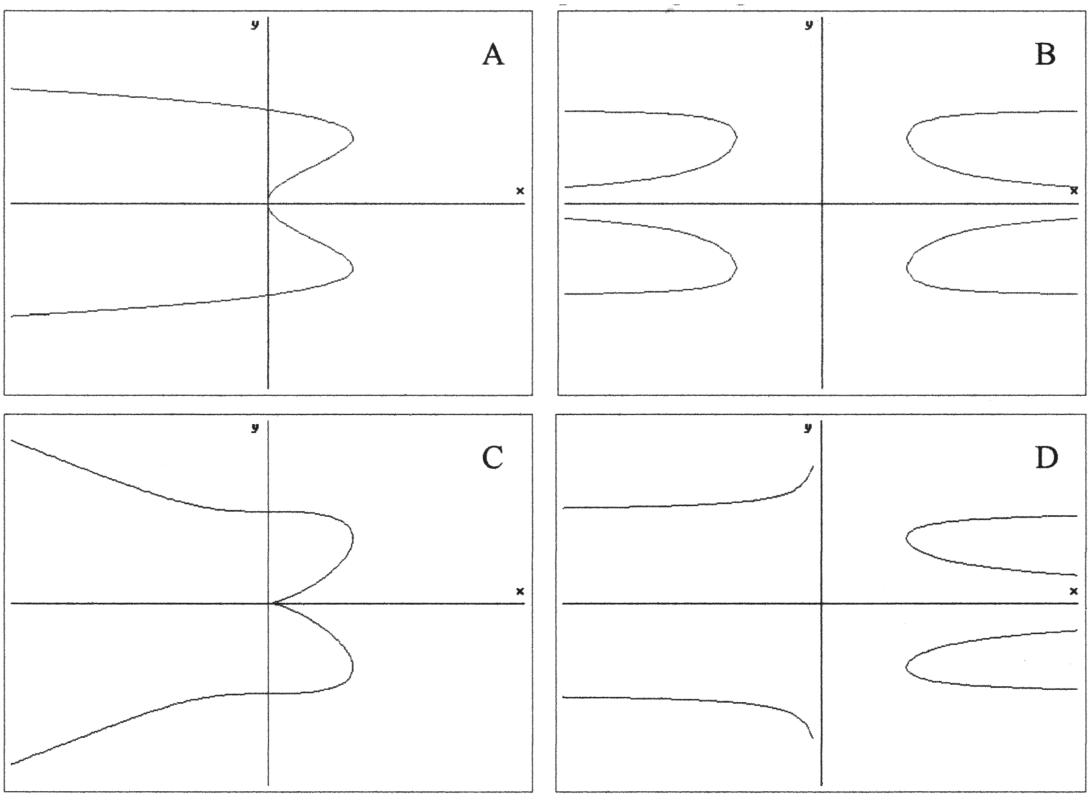
$$1\cdot \int_0^\pi (2\cdot \sin t \cdot \cos^2 t - 2\cdot \sin t \cdot 2\cos^2 t + 2\cdot \sin^3 t)\, dt \ = \ \int_0^\pi 2\cdot \sin^3 t\, dt \ = \ 2\cdot \int_0^\pi \sin^3 t\, dt \ \overset{\text{siehe oben}}{=}$$

$$2\cdot \left[-\cos t + \frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^\pi = 2\cdot \left(\left(-\cos \pi + \frac{\cos^3 \pi}{3}\right) - \left(-\cos 0 + \frac{\cos^3 0}{3}\right)\right) = 2\cdot \left(\left(+1 + \frac{-1}{3}\right) - \left(-1 + \frac{+1}{3}\right)\right) =$$

$$2\cdot \left(\frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right)\right) = 2\cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

Der umschlossene Flächeninhalt beträgt also $\frac{8}{3}$ Flächeneinheiten.

4 Nun werden die Kurven der Kurvenschar mit der Gleichung $x^k - 4y^2 + 4y^4 = 0$ mit $k \in \mathbb{Z}$ betrachtet.
Für die Werte -2, -1, 1 und 3 sind die Graphen aufgetragen:



Ordnen Sie mit ausführlicher Begründung die Graphen A bis D den k-Werten eindeutig zu.

Da der Graph B achsensymmetrisch zur x-Achse und zur y-Achse ist, dürfen in der zugehörigen Gleichung bei x und y nur geradzahlige Exponenten auftauchen.
Das ist nur für den Fall k=2 gegeben. Also gehört k=2 zu B.

Für k=1 gilt $x(y) = 4y^2 + 4y^4$. Es liegt also eine Funktionsgleichung 4. Grades vor mit y als unabhängiger Variable. Das trifft nur auf den Graphen A zu. Also gehört k=1 zu A.

Für k=3 gibt es wegen $x^3 - 4y^2 + 4y^4 = 0$ bei x=0 wegen $-4y^2 \cdot (1 - y^2) = 0$ drei y-Werte bei -1, +1 und 0. Das trifft nicht für den Graphen D zu, kann (Achsen sind nicht skaliert) aber mit dem Graphen C vereinbar sein. Also gehört k=3 zu C

Für k=-1 (also $\frac{1}{x}$... in der Gleichung) gibt es keinen Funktionswert für x=0. Das trifft auf den Graphen D zu. Also gehört k=-1 zu D.