Thema: Analysis - Kurvenschar mit gebrochenrationaler Funktion - Relation

Gegeben ist eine Kurvenschar durch die Gleichung $f_a(x)=\frac{x^2-a}{x+a}$ mit $x\in\mathbb{R}$.

1 Die Graphen der Schar lassen sich in verschiedene Gruppen einteilen, die jeweils Graphen mit ähnlichen Eigenschaften enthalten.
Führen Sie auf Grund von Rechnungen (Teile einer Kurvendiskussion) eine solche Einteilung in Abhängigkeit von a durch und beschreiben Sie charakteristische Eigenschaften der Graphen jeder Gruppe.
Zeichnen Sie eine Skizze der Kurve f_{-1} und Skizzen von möglicherweise auftretenden Sonderfällen.

Ableitungen: $f_a'(x)=\frac{2x\cdot(x+a)-(x^2-a)\cdot 1}{(x+a)^2}=\frac{2x^2+2ax-x^2+a}{(x+a)^2}=\frac{x^2+2ax+a}{(x+a)^2}$

$$f_a''(x)=\frac{(2x+2a)\cdot(x+a)^2-(x^2+2ax+a)\cdot 2(x+a)\cdot 1}{(x+a)^4}\underset{(x+a)}{=}\frac{(2x+2a)\cdot(x+a)-(x^2+2ax+a)\cdot 2}{(x+a)^3}=$$

$$\frac{2x^2+2xa+2ax+2a^2-2x^2-4ax-2a}{(x+a)^3}=\frac{2a^2-2a}{(x+a)^3}$$

Definitionsbereich: $\mathbb{D}=\mathbb{R}\setminus\{-a\}$

Achsenschnitte: y-Achse: $f_a(0)=-1$

Nullstellen: $x^2-a=0 \rightarrow x=\pm\sqrt{a}$

waagrechte Tangenten: $f_a'(x)=0 \rightarrow x^2+2ax+a=0 \rightarrow x_{1,2}=-a\pm\sqrt{a^2-a}$

$f_a''(x_{1,2})=\frac{2a^2-2a}{\left(-a\pm\sqrt{a^2-a}+a\right)^3}=\frac{2\cdot\sqrt{a^2-a}^2}{\pm\sqrt{a^2-a}^3}=\frac{2}{\pm\sqrt{a^2-a}}$ Daraus folgt:

Minimum für a<0 oder a>1 und Vorzeichen +
Maximum für a<0 oder a>1 und Vorzeichen -

Kein Wendepunkt wegen $f_a''(x)\neq 0 \text{ für } a\neq 0 \text{ und } a\neq 1$ Sonderfälle a=0 und a=1 siehe unten.

Pol mit Vorzeichenwechsel bei $x=-a$.

Schräge Asymptote:

$$(x^2-a):(x+a)=x-a+\frac{a^2-a}{x+a}$$
$$\underline{x^2+ax}$$
$$-ax-a$$
$$\underline{-ax-a^2}$$
$$a^2-a$$

für $x\rightarrow\pm\infty$ gilt $f_a(x)\rightarrow x-a$

Asymptote ist also $y=x-a$.

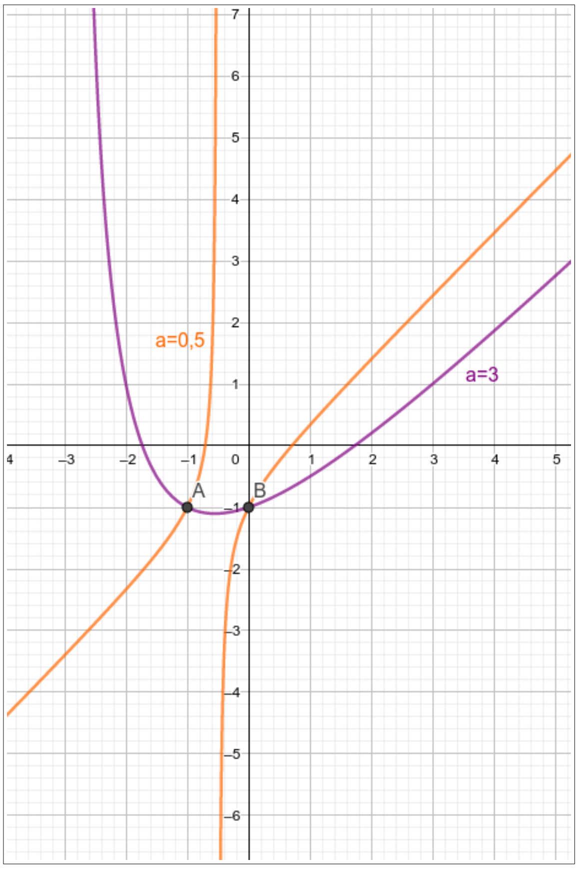
Besondere Fälle:

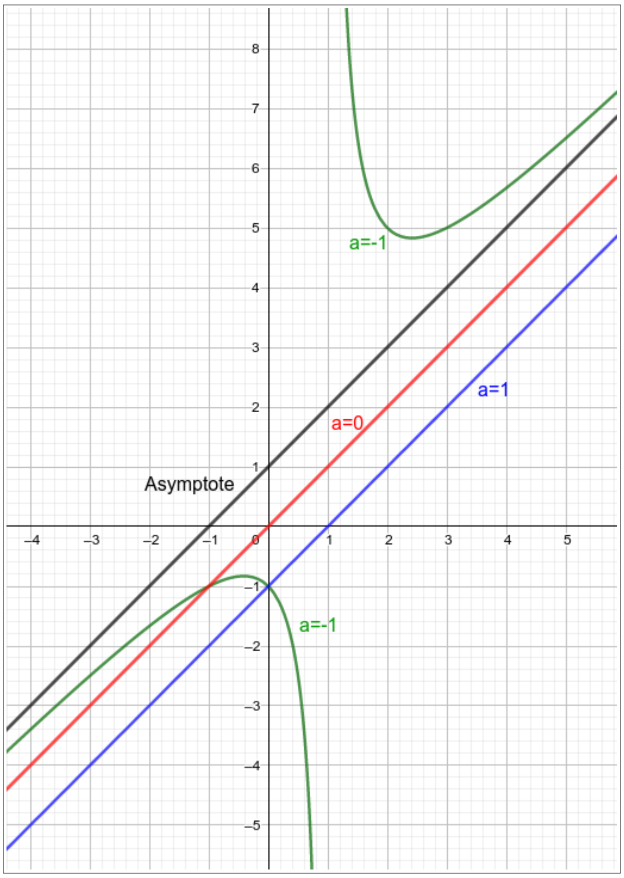
$a=0 \rightarrow f_0(x)=\frac{x^2}{x}=x$ 1. Winkelhalbierende mit Lücke in (0/0)

$a=1 \;\rightarrow\; f_1(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{x+1}=x-1$ mit Lücke in (-1/-2)

$a=-1 \;\rightarrow\; f_{-1}(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$ keine Nullstelle, $f_1(0)=-1$, waagrechte Tangenten bei $x_{1,2}=1\pm\sqrt{1+1}$

Minimum für + bei $\left(1+\sqrt{2}/2+2\sqrt{2}\right)$ und Maximum für - bei $\left(1-\sqrt{2}/2-2\sqrt{2}\right)$.





Einteilung in Gruppen:

a>1 : 2 Nullstellen; Pol im negativen Bereich; Minimum und Maximum

a=1 : Gerade mit Lücke

a>0 und a<1 : 2 Nullstellen; keine Extrema

a=0 : Gerade mit Lücke

a<0 : keine Nullstellen; Pol im positiven Bereich; Minimum und Maximum

2 Zeigen Sie durch Rechnung, dass fast alle Kurven zwei Punkte gemeinsam haben. Berechnen Sie die Koordinaten dieser Punkte und nennen Sie die a-Werte, für die die Kurven <u>nicht beide</u> Punkte enthalten.

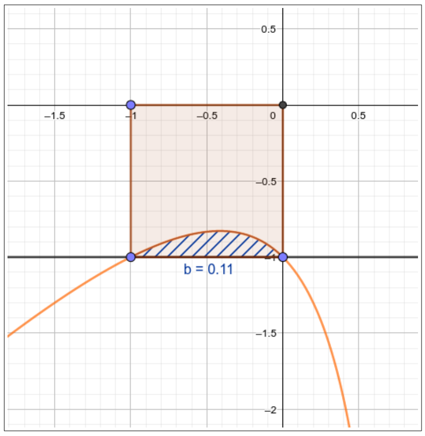
Ansatz mit $a\neq b$: $\dfrac{x^2-a}{x+a}=\dfrac{x^2-b}{x+b} \xrightarrow{\cdot(x+a)(x+b)} (x^2-a)(x+b)=(x^2-b)(x+a) \;\rightarrow$

$x^3+bx^2-ax-ab=x^3+ax^2-bx-ab \;\rightarrow\; bx^2-ax=ax^2-bx \;\rightarrow\; x^2\cdot(b-a)+x\cdot(b-a)=0 \;\rightarrow$

$(x^2+x)(b-a)=0 \;\rightarrow x\cdot(x+1)\cdot(b-a)=0 \;\rightarrow\; x_1=0 ; x_2=-1$

$f_a(0)=\dfrac{-a}{a}=-1 \;;\; f_a(-1)=\dfrac{1-a}{-1+a}=-1$, d.h. die Punkte B(0/-1) und A(-1/-1) gehören zu fast jedem Graphen. Ausnahmen: a=0 und a= 1, weil dann im Nenner eine 0 steht.

3 Der Graph von f_1 und die Gerade mit der Gleichung $y=-1$ schließen ein Flächenstück vollständig ein. Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.



Die gesuchte Fläche ergibt sich aus der Fläche des Quadrates, vermindert um die Fläche zwischen x-Achse und Graph von f_1:

$$A_{Quadrat}=1$$

$$A_{f_1}=\int_{-1}^{0}\frac{x^2+1}{x-1}dx \xrightarrow{\text{Substitution z=x-1}} \int_{-2}^{-1}\frac{z^2+2z+2}{z}dz=$$

$$\int_{-2}^{-1}\left(z+2+\frac{2}{z}\right)dz=\left[\frac{z^2}{2}+2z-2\cdot\ln|z|\right]_{-2}^{-1}=$$

$$\left(\frac{1}{2}-2+0\right)-\left(\frac{4}{2}-4+2\cdot\ln 2\right)=\frac{1}{2}-2\cdot\ln 2\approx-0{,}886$$

Substitution: $z=x-1 \rightarrow \frac{dz}{dx}=1 \rightarrow dx=dz \rightarrow x=z+1 \rightarrow x^2=z^2+2z+1$

gesuchter Flächeninhalt: $A\approx 1-0{,}886=0{,}114$

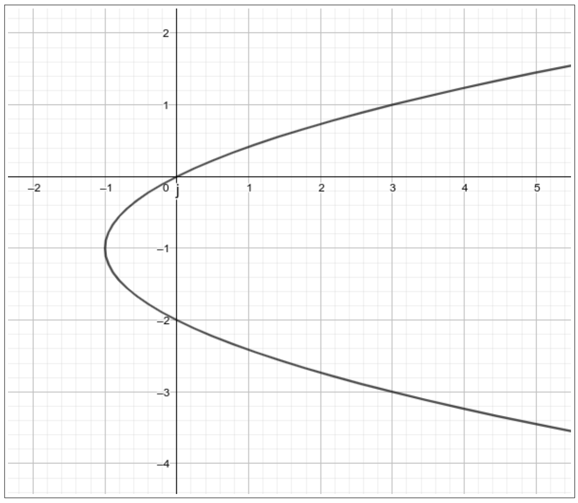
exakter Wert: $A=1+\left(\frac{1}{2}-2\cdot\ln 2\right)=\frac{3}{2}-2\cdot\ln 2$

4 Wird der Parameter a durch das Produkt $x\cdot y$ ersetzt, ergibt sich die algebraische Gleichung

$$y=\frac{x^2-xy}{x+xy}.$$

Untersuchen Sie die Gleichung so weit, bis Sie ausreichend Informationen über den Kurvenverlauf besitzen und skizzieren Sie dann den Graph.

$$y=\frac{x^2-xy}{x+xy} \rightarrow xy+xy^2=x^2-xy \xrightarrow{:x} y+y^2=x-y \rightarrow x=y^2+2y=(y+1)^2-1$$



Der Graph ist eine liegende Parabel mit Scheitel im Punkt (-1/-1), nach rechts geöffnet.
Der Graph hat Lücken bei (0/0) und (0/-2) wegen $x\neq 0$.

Alternativlösung zu 4:

$$y=\frac{x^2-xy}{x+xy} \rightarrow xy+xy^2=x^2-xy \rightarrow$$

$$2xy+xy^2-x^2=0 \quad (*)$$

Achsenschnitte:
x-Achse: $y=0 \rightarrow -x^2=0 \rightarrow x=0$, also (0/0)
y-Achse: $x=0 \rightarrow 0=0$, also ganze y-Achse
Die gefundenen Achsenschnitte gibt es aber nicht wegen der Bedingung $x\neq 0$.

$\frac{d}{dx}$: $2y+2xy'+y^2+2xyy'-2x=0$

waagrechte Tangente: $y'=0 \rightarrow 2y+y^2-2x=0 \quad |\cdot x$

$2xy+xy^2-2x^2=0 \quad$ | (*) subtrahieren

$-x^2=0 \rightarrow x=0$ entfällt wegen $x \neq 0$,

also keine waagrechte Tangente.

$\frac{d}{dy}$: $2x'y+2x+x'y^2+2xy-2xx'=0$

senkrechte Tangente: $x'=0 \rightarrow 2x+2xy=0 \quad |:2x$, da $x \neq 0$

$1+y=0 \rightarrow y=-1$

einsetzen in (*): $-2x+x-x^2=0 \rightarrow x^2+x=0 \rightarrow x\cdot(x+1)=0 \rightarrow x_1=0$ entfällt ; $x_2=-1$

also senkrechte Tangente im Punkt (-1/-1)

$x \rightarrow 0$: $(*)\ \lim\limits_{x \rightarrow 0}(2xy+xy^2-x^2)=0 \quad | :x$

$\lim\limits_{x \rightarrow 0}(2y+y^2-x)=2y+y^2=y\cdot(2+y)=0 \rightarrow y_1=0$; $y_2=-2$

es gibt also Lücken in den Punkten (0/0) und (0/-2)

$x \rightarrow +\infty$: $2y+y^2-x=0 \rightarrow 2y+y^2=x \rightarrow y \rightarrow +\infty$

$x \rightarrow -\infty$: geht nicht, da $2y+y^2=y\cdot(2+y)$ nur negativ für $-2<y<0$