

# Thema: Analysis - Kurvenschar mit gebrochenrationaler Funktion - Relation

Gegeben ist eine Kurvenschar durch die Gleichung  $f_a(x) = \frac{x^2 - a}{x + a}$  mit  $x \in \mathbb{R}$ .

- 1 Die Graphen der Schar lassen sich in verschiedene Gruppen einteilen, die jeweils Graphen mit ähnlichen Eigenschaften enthalten.  
Führen Sie auf Grund von Rechnungen (Teile einer Kurvendiskussion) eine solche Einteilung in Abhängigkeit von  $a$  durch und beschreiben Sie charakteristische Eigenschaften der Graphen jeder Gruppe.  
Zeichnen Sie eine Skizze der Kurve  $f_{-1}$  und Skizzen von möglicherweise auftretenden Sonderfällen.
- 2 Zeigen Sie durch Rechnung, dass fast alle Kurven zwei Punkte gemeinsam haben.  
Berechnen Sie die Koordinaten dieser Punkte und nennen Sie die  $a$ -Werte, für die die Kurven nicht beide Punkte enthalten.
- 3 Der Graph von  $f_1$  und die Gerade mit der Gleichung  $y = -1$  schließen ein Flächenstück vollständig ein. Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.
- 4 Wird der Parameter  $a$  durch das Produkt  $x \cdot y$  ersetzt, ergibt sich die algebraische Gleichung  
$$y = \frac{x^2 - x y}{x + x y}.$$
  
Untersuchen Sie die Gleichung so weit, bis Sie ausreichend Informationen über den Kurvenverlauf besitzen und skizzieren Sie dann den Graph.