Thema: Analysis - e-Funktionen

Gegeben sind die beiden Funktionen f und g durch ihre Gleichungen:

$f(x)=\left(e^x-2\right)^2 \qquad g(x)=\left(e^x+2\right)^2$

1 1.1 Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen von f und g mit den Koordinatenachsen.

y-Achse: $f(0)=\left(e^0-2\right)^2=(1-2)^2=(-1)^2=1 \qquad g(0)=\left(e^0+2\right)^2=(1+2)^2=3^2=9$

x-Achse: $0=\left(e^x-2\right)^2 \rightarrow 0=e^x-2 \rightarrow e^x=2 \rightarrow x=\ln 2$

$0=\left(e^x+2\right)^2 \rightarrow 0=e^x+2 \rightarrow e^x=-2 \rightarrow$ keine Lösung

1.2 Zeigen Sie, dass nur eine der beiden Funktionen ein Minimum besitzt und berechnen Sie die Koordinaten des entsprechenden Punktes.

$f'(x)=2\cdot\left(e^x-2\right)\cdot e^x \overset{!}{=} 0 \rightarrow e^x=2 \rightarrow x=\ln 2 \rightarrow f(\ln 2)=\left(e^{\ln 2}-2\right)^2=(2-2)^2=0^2=0$

$f'(x)=2e^{2x}-4e^x \rightarrow f''(x)=4e^{2x}-4e^x \rightarrow f''(\ln 2)=4e^{2\cdot\ln 2}-4e^{\ln 2}=4\cdot\left(e^{\ln 4}-e^{\ln 2}\right)=4\cdot(4-2)=8>0$

Da $f''(\ln 2)>0$, existiert bei $x=\ln 2$ ein Minimum im Punkt $(\ln 2/0)$.

$g'(x)=2\cdot\left(e^x+2\right)\cdot e^x \overset{!}{=} 0$ Keine Lösung, da kein Faktor zu 0 werden kann.

1.3 Zeigen Sie, dass beide Funktionsgraphen dieselbe Asymptote besitzen und geben Sie die Gleichung der Asymptoten an.

$f(x)=\left(e^x-2\right)^2=e^{2x}-4e^x+4 \qquad g(x)=\left(e^x+2\right)^2=e^{2x}+4e^x+4$

$\lim\limits_{x\rightarrow-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\rightarrow-\infty}\left(e^{2x}-4e^x+4\right)=4 \qquad \lim\limits_{x\rightarrow-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\rightarrow-\infty}\left(e^{2x}+4e^x+4\right)=4$ Beide Funktionsgraphen haben also eine waagrechte Asymptote bei $y=4$.

1.4 Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunktes der Funktion f.

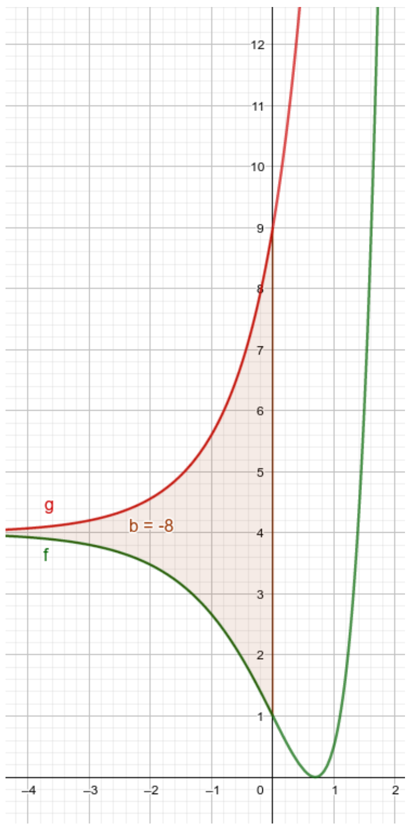
$f''(x)=4e^{2x}-4e^x \underset{!}{=} 0 \rightarrow 4e^{2x}=4e^x \xrightarrow{:4e^x}$

$e^x=1 \rightarrow x=\ln 1=0 \rightarrow f(0)=1$ (siehe 1.1)

$f'''(x)=8e^{2x}-4e^x \rightarrow f'''(0)=8-4=4>0 \rightarrow$

Wendepunkt bei (0/1) (rechts nach links)

1.5 Skizzieren Sie die Graphen von f und g.



2 Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt der Fläche, die von den Graphen von f und g im Bereich $x \leq 0$ eingeschlossen wird, endlich ist, indem Sie diesen Flächeninhalt berechnen.

$\int_{-\infty}^{0} (g(x)-f(x))\,dx = \int_{-\infty}^{0} \left((e^x+2)^2-(e^x-2)^2\right)dx = \int_{-\infty}^{0} \left((e^{2x}+4e^x+4)-(e^{2x}-4e^x+4)\right)dx = \int_{-\infty}^{0} 8e^x\,dx =$

$\left[8e^x\right]_{-\infty}^{0} = 8e^0 - \lim_{z\to-\infty} 8e^z = 8\cdot 1 - 0 = 8$ Der Flächeninhalt beträgt also 8 Flächeneinheiten.

In den weiteren Teilaufgaben wird die Funktionsschar h_a mit der Gleichung

$h_a(x) = e^{2x}+2ae^x+a^2$ betrachtet.

3 Zeigen Sie, dass die Funktionen f und g Sonderfälle der Funktionsschar h_a sind, indem Sie die entsprechenden Parameterwerte a bestimmen.

In 1.3 wurde gezeigt: $f(x)=(e^x-2)^2=e^{2x}-4e^x+4$ $\qquad g(x)=(e^x+2)^2=e^{2x}+4e^x+4$

Daraus folgt $f(x)=h_{-2}(x)$; $g(x)=h_2(x)$

4 Ermitteln Sie rechnerisch, für welche a-Werte die Scharkurven von h_a Wendepunkte besitzen.

$h_a'(x)=2\cdot e^{2x}+2ae^x \rightarrow h_a''(x)=4e^{2x}+2ae^x \overset{!}{=} 0 \quad 2e^x+a=0 \rightarrow e^x=\frac{-a}{2} \rightarrow x=\ln\left(\frac{-a}{2}\right)$

$h_a'''(x)=8e^{2x}+2ae^x \rightarrow h_a'''\left(\ln\left(\frac{-a}{2}\right)\right)=8e^{2\cdot\ln\left(\frac{-a}{2}\right)}+2ae^{\ln\left(\frac{-a}{2}\right)}=8\cdot\ln\left(\frac{a^2}{4}\right)+2a\cdot\left(\frac{-a}{2}\right)=8\cdot\ln\left(\frac{a^2}{4}\right)-a^2$

Wegen $e^x>0$ gilt $a<0$. Wendepunkte gibt es also nur für negative a-Werte.

5 Ermitteln Sie durch Rechnung, welche Beziehung zwischen b und c bestehen muss, damit sich die Graphen von h_b und h_c auf der y-Achse schneiden.

Wenn sich die Graphen schneiden, gilt

$h_b=h_c \rightarrow e^{2x}+2be^x+b^2=e^{2x}+2ce^x+c^2 \rightarrow 2\cdot e^x\cdot(b-c)=c^2-b^2=(c+b)(c-b) \rightarrow 2\cdot e^x=-(c+b)$

Auf der y-Achse ist x=0. Daraus folgt $2\cdot e^0=-(c+b) \rightarrow 2=-(c+b) \rightarrow b+c=-2$

Wenn die Summe von b und c den Wert -2 hat, schneiden sich die zugehörigen Kurven auf der y-Achse.