Thema: Ebene, Ebenenschar und Kugel

Gegeben sind eine Ebene E und eine Ebenenschar F_a durch

$$E:\ \begin{pmatrix}2\\-3\\6\end{pmatrix}\cdot\vec{x}-28=0 \qquad F_a:\ 8\cdot x_1-x_2+4\cdot x_3-18\cdot a=0\ ;\ a\in\mathbb{R}$$

1 E und F_3 schneiden sich in der Schnittgerade g.

Berechnen Sie die Gleichung dieser Geraden g sowie den Winkel zwischen den Ebenen E und F_3.

F_3	$8x_1-x_2+4x_3-54=0$	(1)
E	$2x_1-3x_2+6x_3-28=0$	(2)
$3\cdot(1)$	$24x_1-3x_2+12x_3-162=0$	(3)
$(3)-(2)$	$22x_1+6x_3-134=0$	(4)
$(4)/6$	$\frac{11}{3}x_1+x_3-\frac{67}{3}=0$	(5)

wähle $x_1=3r$, setze in (5) ein und stelle um: $x_3=-11r+\frac{67}{3}$

Forme (1) um und setze Wert ein: $x_2=8x_1+4x_3-54\overset{x_1=3r}{=}24r-44r+\frac{268}{3}-54=-20r+\frac{106}{3}$

Daraus folgt für den Schnittpunkt: $\begin{pmatrix}3r\\-20r+\frac{106}{3}\\-11r+\frac{67}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\\frac{106}{3}\\\frac{67}{3}\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}3\\-20\\-11\end{pmatrix}=\vec{x}$

Winkelberechnung:

$$\cos\alpha=\frac{\begin{pmatrix}2\\-3\\6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}8\\-1\\4\end{pmatrix}}{\sqrt{49}\cdot\sqrt{81}}=\frac{16+3+24}{7\cdot 9}=\frac{43}{63}\ \rightarrow\ \alpha=\arccos\left(\frac{43}{63}\right)\approx 46{,}96°\approx 47°$$

2 Die Kugel k mit dem Radius $r=6$ und dem Mittelpunkt M, der auf der Geraden

$h:\ \vec{x}=s\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$ liegt, hat E als Tangentialebene.

Berechnen Sie die Koordinaten des Kugelmittelpunktes. Alle Lösungen!

Gesucht ist der (Kugelmittel-)Punkt, der auf der Geraden h: $\vec{x}=s\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$ liegt

und von E den Abstand 6 hat.

Ebene E:

$$Normalenform:\ \begin{pmatrix}2\\-3\\6\end{pmatrix}\cdot\vec{x}-28=0$$

$$Hessesche\ Normalenform:\ \frac{1}{7}\cdot\begin{pmatrix}2\\-3\\6\end{pmatrix}\cdot\vec{x}-4=0$$

Gerade h einsetzen: $\frac{1}{7}\cdot\begin{pmatrix}2\\-3\\6\end{pmatrix}\cdot s\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}-4=\pm 6$

s berechnen: $\frac{s\cdot -2+12}{7}-4=\pm 6 \rightarrow \frac{10}{7}\cdot s_1=10$ und $\frac{10}{7}\cdot s_2=-2 \rightarrow s_1=7$ und $s_2=-1{,}4$

daraus folgt für die Ortsvektoren der Mittelpunkte:

$\vec{x_{m1}}=7\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7\\0\\14\end{pmatrix}$ und $\vec{x_{m2}}=-1{,}4\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1{,}4\\0\\-2{,}8\end{pmatrix}$, also $M_1=(-7/0/14)$ und $M_2(1{,}4/0/-2{,}8)$

3 Der Punkt $P(5/-4/a^2)$ ist gegeben.

Berechnen Sie, für welches a der Abstand von P zu F_a gleich a ist. Alle Lösungen!

Für die Ebenenschar F_a gilt:

$$Normalenform:\ \begin{pmatrix}8\\-1\\4\end{pmatrix}\cdot\vec{x}-18a=0 \rightarrow Hessesche\ Normelenform:\ \frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix}8\\-1\\4\end{pmatrix}\cdot\vec{x}-2a=0$$

Punkt P einsetzen, der Abstand ist $\pm a$:

$$\frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix}8\\-1\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\-4\\a^2\end{pmatrix}-2a=\pm a$$

Mit dem + Zeichen folgt: $\frac{40+4+4a^2}{9}=3a \rightarrow 4a^2+44=27a \rightarrow a^2-\frac{27}{4}a+11=0 \rightarrow$

$$a_{1,2}=\frac{27}{8}\pm\sqrt{\frac{729}{64}-\frac{704}{64}}=\frac{27}{8}\pm\sqrt{\frac{25}{64}}=\frac{27}{8}\pm\frac{5}{8} \rightarrow a_1=\frac{32}{8}=4 \;;\; a_2=\frac{22}{8}=\frac{11}{4}$$

Mit dem - Zeichen folgt: $\frac{40+4+4a^2}{9}=a \rightarrow 4a^2+44=9a \rightarrow a^2-\frac{9}{4}a+11=0 \rightarrow$

$$a_{3,4}=\frac{9}{8}\pm\sqrt{\frac{81}{64}-\frac{704}{64}} \rightarrow \text{ keine relle Lösung}$$

4 Zeigen Sie, dass es ein a gibt, so dass die Gerade $g_a\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-6a\\2\\3a\end{pmatrix}$ nicht die Ebene E schneidet.

Bedingung: Der Richtungsvektor der Geraden muss senkrecht zum Normalenvektor der Ebene sein und der Ortsvektor der Geraden darf kein Ortsvektor der Ebene sein.

"senkrecht":

$$\begin{pmatrix}-6a\\2\\3a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-3\\6\end{pmatrix}=-12a-6+18a=0 \rightarrow 6a-6=0 \rightarrow a=1$$

"Punktprobe":

$$\begin{pmatrix}2\\-3\\6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}-28=4-3-18-28=-45\neq 0$$

Die Bedingungen sind erfüllt, es existiert also a=1 mit den gewünschten Eigenschaften.