Thema: Analysis - Kurvenschar - e-Funktion

Gegeben ist eine Funktionenschar f_a durch die Gleichung $f_a(x)=\dfrac{x+a}{a\cdot e^x}$; $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

1 Untersuchen Sie die Funktionenschar auf Definitionsbereich, Verhalten für betragsmäßig große x, Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, waagrechte Tangenten und Wendepunkte.
Zeichnen Sie die Schaubilder der Funktionen $f_{-1}(x)$ und $f_2(x)$.

Definitionsbereich: $D=\mathbb{R}$, da $e^x\neq 0$ für alle x

Verhalten für betragsmäßig große x:

$x\to+\infty \;\to\; f_a(x)\to\frac{\infty}{\infty}$

Anwendung der Regel von l' Hospital:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+a}{a\cdot e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{a\cdot e^x}=0$$

Also ist die x-Achse Asymptote für $x\to+\infty$.

$x\to-\infty \;\to\; f_a(x)\to\frac{-\infty}{+0} \;\to\; -\infty$ für $a>0$ und $f_a(x)\to\frac{-\infty}{-0} \;\to\; +\infty$ für $a<0$

Achsenschnittpunkte:

x-Achse: $y=0$, also $\dfrac{x+a}{a\cdot e^x}=0 \;\to\; x+a=0 \;\to\; x=-a$

y-Achse: $x=0$, also $y=\dfrac{0+a}{a\cdot e^0}=\dfrac{a}{a}=1 \;\to\; y=1$, unabhängig von a

Ableitungen:

$$f_a'(x)=\frac{1\cdot a e^x-(x+a)\cdot a e^x}{(a e^x)^2}=\frac{1-(x+a)}{a e^x}=\frac{-x-a+1}{a e^x}$$

$$f_a''(x)=\frac{-1\cdot a e^x-(-x-a+1)\cdot a e^x}{(a e^x)^2}=\frac{-1-(-x-a+1)}{a e^x}=\frac{x+a-2}{a e^x}$$

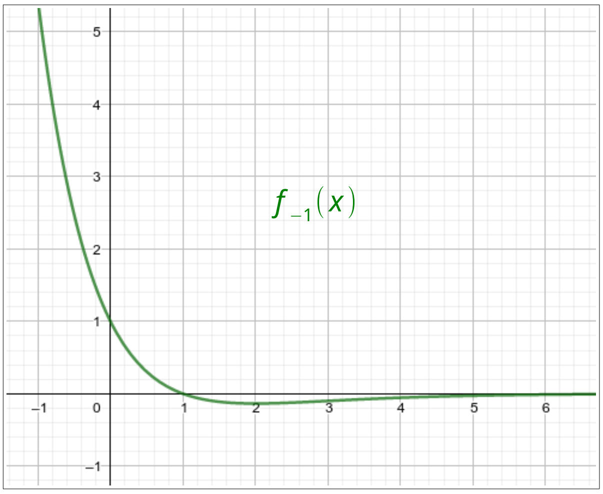
$$f_a'''(x)=\frac{1\cdot a e^x-(x+a-2)\cdot a e^x}{(a e^x)^2}=\frac{1-(x+a-2)}{a e^x}=\frac{-x-a+3}{a e^x}$$

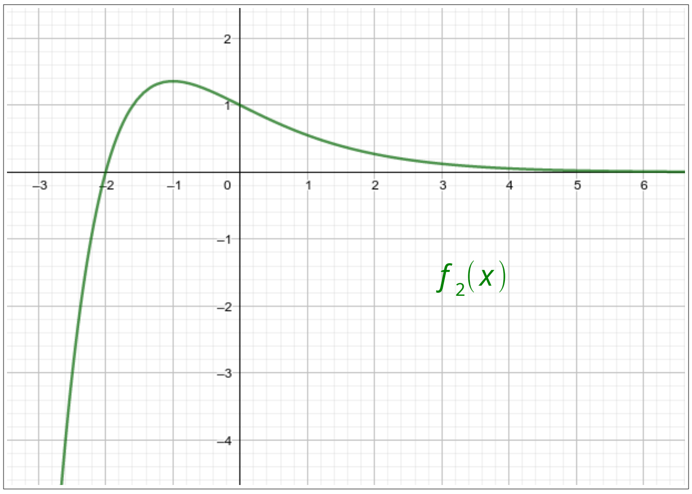
waagrechte Tangenten: $f_a'(x)=0 \;\to\; -x-a+1=0 \;\to\; x=1-a \;\to\; f_a(1-a)=\dfrac{1}{a\cdot e^{1-a}}$

Art des Extremums $f_a''(1-a)=\dfrac{1-a+a-2}{a e^{1-a}}=\dfrac{-1}{a e^{1-a}} \;\to\;$ Maximum für $a>0$; Minimum für $a<0$

Wendepunkte: $f_a''(x)=0 \;\to\; x+a-2=0 \;\to\; x=2-a \;\to\; f_a(2-a)=\dfrac{2}{a e^{2-a}}$

Krümmung $f_a'''(2-a)=\dfrac{-2+a-a+3}{a e^{2-a}}=\dfrac{1}{a e^{2-a}} \;\to\;$ rechts → links für $a>0$
links → rechts für $a<0$





2 Berechnen Sie, für welches $a>0$ der Punkt mit waagrechter Tangente den kleinsten Funktionswert besitzt.

x-Wert bei waagrechter Tangente: $x=1-a$

y-Wert an dieser Stelle: $f_a(1-a)=\frac{1-a+a}{a\,e^{1-a}}=\frac{1}{a\,e^{1-a}}=y(a)$

Minimum von $y(a)$: (Kettenregel, Produktregel)

$$y'(a)=-\frac{1}{(a\cdot e^{1-a})^2}\cdot(1\cdot e^{1-a}+a\cdot e^{1-a}\cdot(-1))=-\frac{1}{(a\cdot e^{1-a})^2}\cdot(e^{1-a}-a\cdot e^{1-a})=-\frac{e^{1-a}}{(a\cdot e^{1-a})^2}\cdot(1-a)=\frac{a-1}{a^2\cdot e^{1-a}}\overset{!}{=}0 \rightarrow a=1$$

Art des Extremums: $y''(a)=\frac{1\cdot a^2 e^{1-a}-(a-1)\cdot(2a\,e^{1-a}+a^2 e^{1-a}\cdot(-1))}{(a^2\cdot e^{1-a})^2}$

$$y''(1)=\frac{1\cdot 1\cdot e^0-0\cdot(...)}{(1\cdot e^0)^2}=\frac{1}{1}=1>0 \rightarrow \text{ Minimum}$$

3 Zeigen Sie, dass die Schaubilder zweier Funktionen $f_r(x)$ und $f_s(x)$ mit $r\neq s$ immer genau einen Schnittpunkt haben. Berechnen Sie die Koordinaten dieses Schnittpunktes.

$$f_r(x)=\frac{x+r}{r\cdot e^x}=\frac{x+s}{s\cdot e^x}=f_s(x) \rightarrow (x+r)\cdot s\cdot e^x=(x+s)\cdot r\cdot e^x \xrightarrow{:e^x} x\,s+r\,s=x\,r+s\,r \xrightarrow{-sr} x\,s=x\,r \xrightarrow{-xr}$$

$$xs-xr=0 \rightarrow x\cdot(s-r)=0$$

entweder ist $s=r$, was aber wegen der Bedingung $s\neq r$ ausscheidet

oder $x=0$, d. h. alle Kurven schneiden sich bei $x=0$ im Punkt (0/1) (siehe oben)

4 Zeigen Sie, dass die Fläche, die sich im 1. Quadranten zwischen dem Schaubild für $a>0$ und der x-Achse befindet, endlichen Flächeninhalt besitzt, indem Sie den Flächeninhalt in Abhängigkeit von a berechnen.

Lösung mit HIlfe der Produktintegration: $\int (u \cdot v')dx = u \cdot v - \int (u' \cdot v)dx$

$$\int_0^\infty \frac{x+a}{a \cdot e^x}dx = \int_0^\infty \underbrace{(x+a)}_{u} \cdot \underbrace{\frac{1}{a \cdot e^x}}_{v'}dx = \int_0^\infty \underbrace{(x+a)}_{u} \cdot \underbrace{\frac{e^{-x}}{a}}_{v'}dx \overset{u'=1\ ;\ v=-\frac{e^{-x}}{a}}{=} \left[-\frac{x+a}{a\,e^x}\right]_0^\infty - \int_0^\infty -\frac{e^{-x}}{a}dx =$$

$$\left[-\frac{x+a}{a\,e^x} - \frac{e^{-x}}{a}\right]_0^\infty = \left[\frac{-x-a-1}{a\,e^x}\right]_0^\infty \underset{l'Hospital(s.o.)}{=} 0 - \frac{-a-1}{a} = \frac{1}{a}+1$$, d. h. endlicher Wert für alle a außer 0.

Anmerkung:

Für $a<0$ müsste man den Flächeninhalt bestimmen aus $\left|\int_0^{-a} f_a(x)dx\right| + \left|\int_{-a}^\infty f_a(x)dx\right|$.

Das muss hier aber nicht durchgeführt werden, das es nur auf die Endlichkeit des Flächeninhaltes ankommt.