Thema: Vektorrechnung - Geradenschar - Kugelschar

Gegeben sind eine Geradenschar g_a und eine Kugelschar k_a durch

$$g_a:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\1-a\\-2\end{pmatrix}\quad ;\quad k_a:\ \left(\vec{x}-\begin{pmatrix}a\\1\\-a\end{pmatrix}\right)^2=3\ ;\ a\in\mathbb{R}$$

Berechnen Sie bei den folgenden Aufgaben immer alle Lösungen.

1 Berechnen Sie das a, für das der Mittelpunkt der Kugel k_a auf g_a liegt.

Vektor zum Kugelmittelpunkt in die Geradengleichung einsetzen:

$$\begin{pmatrix}a\\1\\-a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\1-a\\-2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{matrix}a=1+s\\1=2+s-s\cdot a\\-a=-2\cdot s\end{matrix}\rightarrow\begin{matrix}a=1+s\\ \\a=2\cdot s\end{matrix}\rightarrow 2s=1+s\rightarrow s=1\rightarrow a=2\xrightarrow{\text{prüfen}}1\stackrel{?}{=}2+1-2=1$$

Für a=2 liegt der Mittelpunkt der Kugel k_2 auf der Geraden g_2.

2 Eine zu g_3 senkrechte Ebene ist Tangentialebene an k_3.
Bestimmen Sie die zugehörige Ebenengleichung.

$$g_3:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}\quad ;\quad k_a:\ \left(\vec{x}-\begin{pmatrix}3\\1\\-3\end{pmatrix}\right)^2=3$$

Da die Gerade senkrecht auf der Ebene steht, ist der Richtungsvektor der Geraden gleich dem Normalenvektor der Ebene. Der Mittelpunkt der Kugel muss von der Ebene den Abstand $\sqrt{3}$ (Radius der Kugel) haben.

Normalen-Einheitsvektor ist $\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}$.

Hessesche Normalenform mit Abstandsberechnung:

$$\vec{x}\cdot\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}-c=0\rightarrow\begin{pmatrix}3\\1\\-3\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}-c=\pm\sqrt{3}\rightarrow\begin{pmatrix}3\\1\\-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}-3\cdot c=\pm3\cdot\sqrt{3}$$

$$3-2+6-3\cdot c=\pm3\cdot\sqrt{3}\rightarrow 7-3\cdot c=\pm3\cdot\sqrt{3}\rightarrow 3\cdot c=7\mp3\cdot\sqrt{3}\rightarrow c=\frac{7}{3}\mp\sqrt{3}$$

gesuchte Ebenengleichungen: $\vec{x}\cdot\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}-\frac{7}{3}\pm\sqrt{3}=0$

3 Berechnen Sie, für welches a die Gerade g_a den größten Abstand zum Koordinatenursprung hat.
Berechnen Sie den Wert des Abstandes.

Da wegen des Ortsvektors $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ der Abstand höchstens $\sqrt{1^2+2^2+0^2}=\sqrt{5}$ betragen kann, erhält man die gesuchte Gerade, indem man einen Richtungsvektor sucht, der senkrecht zum Ortsvektor liegt.

Ansatz: $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1-a\\-2\end{pmatrix}=0 \rightarrow 1+2-2a+0=0 \rightarrow 3=2a \rightarrow a=\frac{3}{2}$

Die am weitesten vom Ursprung entfernte Gerade ist also

$g_{\frac{3}{2}}:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\1-\frac{3}{2}\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\-0{,}5\\-2\end{pmatrix}$ mit dem Abstand $\sqrt{5}$.

4 Zwei der Kugeln der Schar enthalten den Koordinatenursprung.
Berechnen Sie die Gleichungen der Kreise, die von den Kugeln aus der x-y-Ebene ausgeschnitten werden.

Einsetzen des Nullvektors in die Kugelgleichung:

$$\left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a\\1\\-a\end{pmatrix}\right)^2=3 \rightarrow \begin{pmatrix}-a\\-1\\a\end{pmatrix}^2=3 \rightarrow a^2+1^1+a^2=3 \rightarrow 2a^2=2 \rightarrow a^2=1 \rightarrow a_{1,2}=\pm1$$

Gesuchte Kugeln sind $k_1:\ \left(\vec{x}-\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right)^2=3$ und $k_2:\ \left(\vec{x}-\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\right)^2=3$.

Die Mittelpunkte M_1 und M_2 der gesuchten Kreise sind die Projektionen der Kugelmittelpunkte auf die x-y-Ebene, also $M_1(1/1)$ und $M_2(-1/1)$. Deren Abstände (= Radien) zum Koordinatenursprung sind $r_1=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ und $r_2=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$

Damit sind die gesuchten Kreisgleichungen $\left(\vec{x}-\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)^2=2$ und $\left(\vec{x}-\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right)^2=2$.