Thema: Analysis - Kurve in Parameterdarstellung

Gegeben ist eine Kurve in Parameterdarstellung: $x=t^3-t^2 \;;\; y=t^2$

1 1.1 Untersuchen Sie die Eigenschaften der Kurve bei den Schnittpunkten mit den Koordinatenachsen.

x-Achse: $y=0 \rightarrow 0=t^2 \rightarrow t=0 \rightarrow x=0^3-0^2=0 \rightarrow P_x(0/0)$

y-Achse:
$x=0 \rightarrow 0=t^3-t^2=t^2\cdot(t-1) \rightarrow t_{1,2}=0 \;;\; t_3=1 \rightarrow y_{1,2}=0 \;;\; y_3=1 \rightarrow P_{y12}(0/0); P_{y3}(0/1)$

Ableitungen: $x'(t)=3t^2-2t \;;\; y'(t)=2t$ → Steigung: $m(t)=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{2t}{3t^2-2t}=\frac{2}{3t-2}$

$\text{Punkt}(0/0) \rightarrow t=0 \rightarrow m(0)=\frac{2}{-2}=-1$

$\text{Punkt}(0/1) \rightarrow t=1 \rightarrow m(1)=\frac{2}{3-2}=\frac{2}{1}=2$

1.2 Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte, an denen waagrechte und senkrechte Tangenten vorliegen.

Bedingung für waagrechte Tangenten: $\frac{y'(t)}{x'(t)}=0 \rightarrow \frac{2t}{3t^2-2t}=0 \rightarrow 2t=0 \rightarrow t=0$

Lösung existiert nicht, weil für t der Nenner gleich 0 ist.

Bedingung für senkrechte Tangenten:
$\frac{x'(t)}{y'(t)}=0 \rightarrow \frac{3t^2-2t}{2t}=0 \rightarrow 3t^2-2t=0 \rightarrow t\cdot(3t-2)=0 \rightarrow t_1=0 \;;\; t_2=\frac{2}{3}$

Lösung t=0 existiert nicht, weil für t der Nenner gleich 0 ist.

Für $t=\frac{2}{3}$ existiert eine senkrechte Tangente im Punkt $(t^3-t^2 / 2t)=\left(\frac{8}{27}-\frac{4}{9} / \frac{4}{3}\right)=\left(-\frac{4}{27} / \frac{4}{3}\right)$.

1.3 Untersuchen Sie das Verhalten der Kurve bei betragsmäßig großen t-Werten.

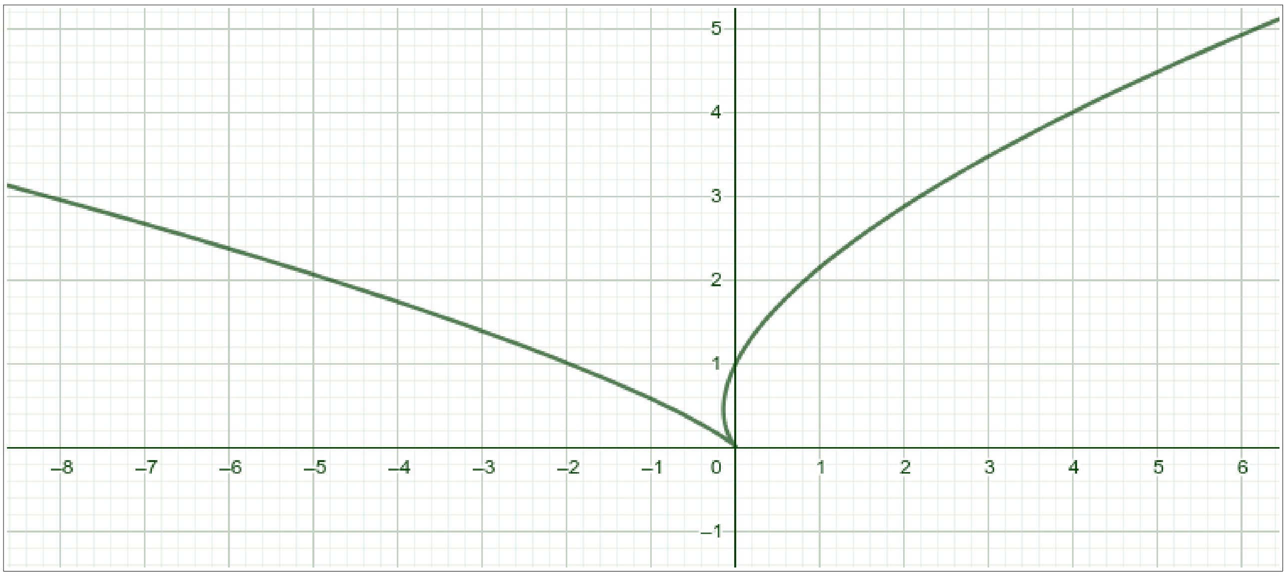
Für $t\rightarrow+\infty$ gilt $x(t)\rightarrow+\infty$ und $y(t)\rightarrow+\infty$, die Kurve verläuft also im 1. Quadranten.

Für $t\rightarrow-\infty$ gilt $x(t)\rightarrow-\infty$ und $y(t)\rightarrow+\infty$, die Kurve verläuft also im 2. Quadranten.

1.4 Gehen Sie besonders auf die Eigenschaften der Kurve in der Nähe des Koordinatenursprungs ein.

Wie in 1.1 gezeigt, beträgt die Steigung im Ursprung $m=-1$.
Wegen $x(t)=t^3-t^2=t^2\cdot(t-1)$ ändert sich in der näheren Umgebung von t=0 das Vorzeichen für x(t) nicht, sondern bleibt für t<0 und t>0 negativ.
Wegen $y(t)=t^2$ ändert sich in der näheren Umgebung von t=0 auch das Vorzeichen für y(t) nicht, sondern bleibt für t<0 und t>0 positiv.
Es liegt im Nullpunkt also eine Spitze vor, die im Nullpunkt die Steigung -1 besitzt.

1.5 Skizzieren Sie den Graph.



2 Der Graph schließt im 2. Quadranten mit der y-Achse ein Flächenstück vollständig ein.
Berechnen Sie den Flächeninhalt dieser Fläche.

Leibnizsche Sektorformel: $A_{Sektor}=\frac{1}{2}\cdot\int_a^b \left(x(t)\cdot y'(t)-y(t)\cdot x'(t)\right)dt$

Integrationsgrenzen sind die t-Werte 1 und 0 für die Schnittpunkte mit der y-Achse.

$x(t)=t^3-t^2 \rightarrow x'(t)=3t^2-2t \;;\; y(t)=t^2 \rightarrow y'(t)=2t$

$A_{Sektor}=\frac{1}{2}\cdot\int_1^0 \left((t^3-t^2)\cdot(2t)-(t^2)\cdot(3t^2-2t)\right)dt=\frac{1}{2}\cdot\int_1^0 \left(2t^4-2t^3-3t^4+2t^3\right)dt=\frac{1}{2}\cdot\int_1^0 \left(-t^4\right)dt=$

$-\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{t^5}{5}\right]_1^0=-\frac{1}{2}\cdot\left(0-\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{10}=0{,}1$ Der Flächeninhalt beträgt 0,1 Flächeneinheiten.

3 Für jeden y-Wert größer als 0 existieren zwei Punkte der Kurve.
Berechnen Sie, für welchen y-Wert der eine zugehörige Punkt im 2. Quadranten doppelt so weit von der y-Achse entfernt ist wie der andere Punkt im 1. Quadranten.

Die Punkte der Kurve sind gegeben durch $\left(t^3-t^2/t^2\right)$ mit $t\in\mathbb{R}$.

Für die 2 gesuchten Punkte P_1 und P_2 im 1. und 2. Quadranten gelten laut Aufgabenstellung folgende Bedingungen: $x_1=-x_2$ und $y_1=y_2 \rightarrow 2\cdot(t_1^3-t_1^2)=-(t_2^3-t_2^2)$ und $t_1^2=t_2^2$

$t_1^2=t_2^2 \rightarrow t_2=\pm t_1 \rightarrow 2\cdot t_1^3-2\cdot t_1^2=-(t_1^2\cdot(\pm t_1)-t_1^2) \rightarrow 2\cdot t_1^3-2\cdot t_1^2=\mp t_1^3+t_1^2 \rightarrow$

$\begin{bmatrix} 3\cdot t_1^3-3\cdot t_1^2=0 \\ t_1^3-3\cdot t_1^2=0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3\cdot t_1^2\cdot(t_1-1)=0 \\ t_1^2\cdot(t_1-3)=0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} (t_1=0 \text{ und } t_2=0) \text{ oder } (t_1=1 \text{ und } t_2=\pm 1) \\ (t_1=0 \text{ und } t_2=0) \text{ oder } (t_1=3 \text{ und } t_2=\pm 3) \end{bmatrix}$

Fallunterscheidung: $t_1=t_2=0$ entfällt, da dann y=0 und nicht wie gefordert y>0.

$t_1=1$ und $t_2=\pm 1$ Die Fälle sind trivial, da P_1 auf der y-Achse liegt, also den Abstand 0 hat. Entweder gilt $P_1=P_2$ oder P_2 hat nicht den doppelten Abstand von der y-Achse wie P1.

$t_1=3$ und $t_2=\pm 3$ Der Fall "+" entfällt, da dann P_1 und P_2 auf derselben Seite der y-Achse liegen.

Für $t_1=3$ und $t_2=-3$ gilt

$P_1\left(3^3-3^2 \ / \ 3^2\right) \rightarrow P_1\left(27-9 \ / \ 9\right) \rightarrow P_1\left(18 \ / \ 9\right)$

$P_2\left(\left(-3\right)^3-\left(-3\right)^2 \ / \ \left(-3\right)^2\right) \rightarrow P_1\left(-27-9 \ / \ 9\right) \rightarrow P_1\left(-36 \ / \ 9\right)$

Für $|t|=3$ hat der Punkt im 2. Quadranten den doppelten Abstand von der y-Achse wie der Punkt mit gleichem y-Wert im 1. Quadranten.