Thema: Analysis - gebrochenrationale Funktion, Kurvenschar

Gegeben ist die Kurvenschar mit der Gleichung $f_a(x)=\frac{x^2-a}{x+a}$ mit $a \in \mathbb{R}$.

1 Untersuchen Sie die Kurven auf folgende Eigenschaften: Definitionsbereich, Verhalten für betragsmäßig große x, Schnitte mit den Koordinatenachsen, Extrema.
Die Graphen lassen sich in verschiedene Gruppen einteilen, die jeweils Graphen mit ähnlichen Eigenschaften enthalten. Führen Sie auf Grund der erfolgten Rechnungen eine solche Einteilung in Abhängigkeit von a durch.

Definitionsbereich: $\mathbb{D}_x=\mathbb{R}\setminus\{-a\}$

$$(x^2-a):(x+a)=x-a+\frac{a^2-a}{x+a}$$

$$\begin{array}{l} \underline{x^2+ax} \\ \quad -ax-a \\ \quad \underline{-ax-a^2} \\ \qquad\quad a^2-a \end{array}$$

$x \to \pm\infty$: $y \to \pm\infty$ mit $y=x-a$ als schräger Asymptote

Schnitte mit den Koordinatenachsen:

x-Achse: $f_a(x)=\frac{x^2-a}{x+a}\overset{!}{=}0 \to x^2-a=0 \to (x+\sqrt{a})\cdot(x-\sqrt{a})=0 \to x_1=-\sqrt{a}\ ;\ x_2=+\sqrt{a}$ mit $a\geq 0$

y-Achse: $x=0 \to f_a(0)=\frac{0-a}{0+a}=\frac{-a}{a}=-1$ mit $a\neq 0$

$$f_a'(x)=\frac{2x\cdot(x+a)-(x^2-a)\cdot 1}{(x+a)^2}=\frac{2x^2+2ax-x^2+a}{(x+a)^2}=\frac{x^2+2ax+a}{(x+a)^2}$$

$$f_a''(x)=\frac{(2x+2a)\cdot(x+a)^2-(x^2+2ax+a)\cdot(2\cdot(x+a)\cdot 1)}{(x+a)^4}=\frac{(2x+2a)\cdot(x+a)-(x^2+2ax+a)\cdot 2}{(x+a)^3}=$$

$$\frac{2x^2+2ax+2ax+2a^2-2x^2-4ax-2a}{(x+a)^3}=\frac{2a^2-2a}{(x+a)^3}$$

Extrema: $f_a'(x)=\frac{x^2+2ax+a}{(x+a)^2}\overset{!}{=}0 \to x^2+2ax+a=0 \to x_{1,2}=-a\pm\sqrt{a^2+a}$

$$f_a''\left(-a\pm\sqrt{a^2+a}\right)=\frac{2a^2-2a}{\left(-a\pm\sqrt{a^2+a}+a\right)^3}=\frac{2a\cdot(a-1)}{\pm\sqrt{a^2+a}^3}$$

Fallunterscheidung:

$a>1$ und $a<0$: Es existiert jeweils ein Maximum und ein Minimum.

$0<a<1$: keine Maxima vorhanden

Alle Graphen in diesen Bereichen besitzen einen Pol bei $x=-a$.
Sonderfälle für a=0 und a=1:

$a=0 \rightarrow f_0(x)=\dfrac{x^2-0}{x+0}=\dfrac{x^2}{x}=x$ mit Lücke bei $x=0$.

$a=1 \rightarrow f_1(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}=\dfrac{(x-1)\cdot(x+1)}{x+1}=x-1$ mit Lücke bei $x=-1$.

2 Zeigen Sie, dass fast alle Kurven zwei Punkte gemeinsam haben.
Berechnen Sie die Koordinaten dieser Punkte und nennen Sie die Ausnahmen.

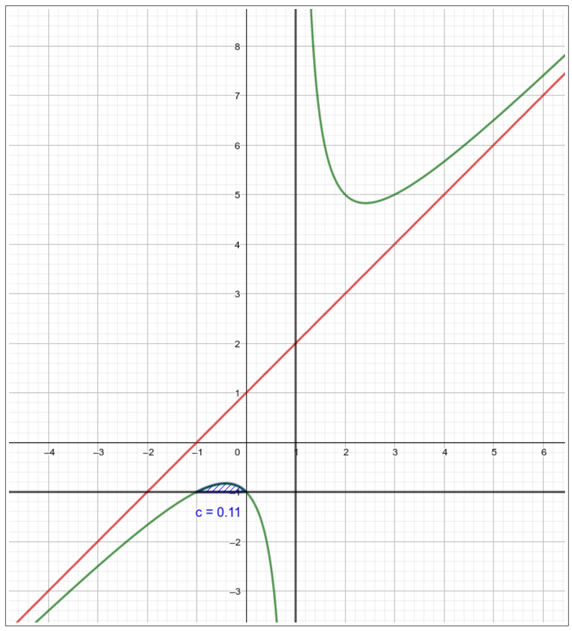
Ansatz: $f_a(x)=f_b(x) \rightarrow \dfrac{x^2-a}{x+a}=\dfrac{x^2-b}{x+b} \rightarrow (x^2-a)\cdot(x+b)=(x^2-b)\cdot(x+a) \rightarrow$

$x^3+bx^2-ax-ab=x^3+ax^2-bx-ab \rightarrow bx^2-ax=ax^2-bx \rightarrow b\cdot(x^2+x)=a\cdot(x^2+x)$

Diese Gleichung ist erfüllt, wenn $x^2+x=0 \rightarrow x\cdot(x+1)=0 \rightarrow x_1=0 \;;\; x_2=-1$

$f_a(0)=\dfrac{0-a}{0+a}=\dfrac{-a}{a}=-1 \;;\; f_a(-1)=\dfrac{1-a}{-1+a}=-1$

Die fast allen Graphen gemeinsamen Punkte sind also $(0/-1)$ und $(-1/-1)$.
Ausnahmen: $a=0$ und $a=1$ (siehe oben bei Aufgabe 1).



3 Skizzieren Sie die Kurve für $a=-1$ im Bereich $-4\leq x\leq +6$.

4 Der Graph mit $a=-1$ und die Gerade mit $y=-1$ schließen ein Flächenstück vollständig ein.
Berechnen Sie den Flächeninhalt dieser Fläche.

Berechnung der Graphen-Schnittpunkte:

$\dfrac{x^2+1}{x-1}=-1 \rightarrow x^2+1=-x+1 \rightarrow x^2+x=0 \rightarrow x\cdot(x+1)=0$

$\rightarrow x_1=0 \;;\; x_2=-1$

Mit der Substitution $z=x-1$ bzw. $x=z+1$ ergibt sich:

$\dfrac{dz}{dx}=1 \rightarrow dx=dz \;;\; x=-1\rightarrow z=-2 \;;\; x=0\rightarrow z=-1$

$$\int_{-1}^{0}\left(\frac{x^2+1}{x-1}-(-1)\right)dx=\int_{-1}^{0}\left(\frac{x^2+1}{x-1}+1\right)dx=\int_{-2}^{-1}\left(\frac{(z+1)^2+1}{z}+1\right)dz$$

$$=\int_{-2}^{-1}\left(\frac{z^2+2z+1+1}{z}+1\right)dx=\int_{-2}^{-1}\left(z+2+\frac{2}{z}+1\right)dz=\int_{-2}^{-1}\left(z+3+\frac{2}{z}\right)dz$$

$$=\left[\frac{z^2}{2}+3z+2\cdot\ln|z|\right]_{-2}^{-1}=\left(\frac{1}{2}-3+2\cdot\ln 1\right)-\left(\frac{4}{2}-6+2\cdot\ln 2\right)=\left(-\frac{5}{2}+0\right)-\left(-4+2\cdot\ln 2\right)=\frac{3}{2}-2\cdot\ln 2\approx 0{,}1137$$

Der Flächeninhalt beträgt etwa 0,11 Flächeneinheiten.