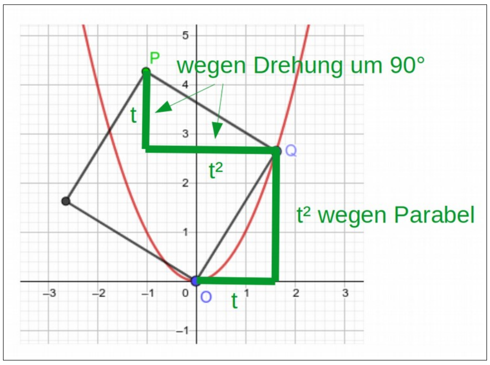
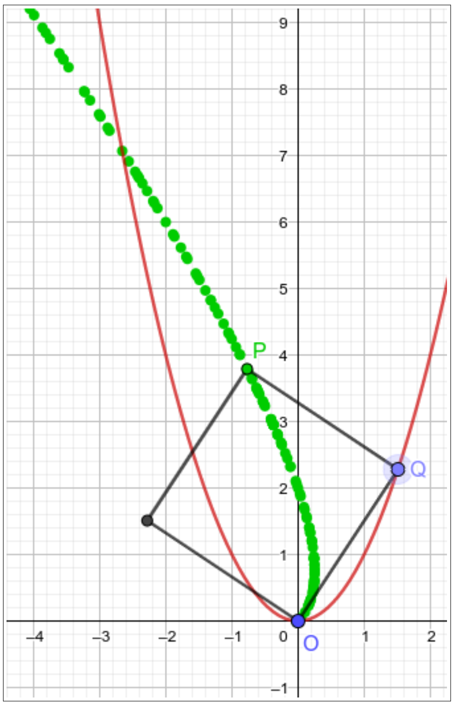
Thema: Kurve in Parameterdarstellung



Gegeben ist die Normalparabel mit der Gleichung $y=x^2$.

Ein Quadrat wird so in das Koordinatensystem gelegt, dass der eine Eckpunkt O im Punkt (0/0) und ein weiterer Eckpunkt Q im 1. Quadranten auf der Parabel liegt (siehe Skizze).

Betrachtet werden soll die Ortskurve aller Punkte P, die als Quadrateckpunkte dem Ursprung diagonal gegenüber liegen (siehe Skizze).



1 Zeigen Sie durch vervollständigte Zeichnung und Rechnung, dass die gesuchte Ortskurve gegeben ist durch $x=t-t^2$ und $y=t+t^2$, wobei t jeweils die x-Koordinate des Punktes Q ist, der im 1. Quadranten auf der Parabel liegt.

Aus der Skizze ergeben sich unmittelbar die Werte für x und y zu $x=t-t^2$ und $y=t+t^2$.

Ermitteln Sie, aus welchem Bereich die t-Werte gewählt werden müssen, damit alle oben beschriebenen Punkte erreicht werden.

Da t dem x-Wert des Punktes Q entspricht und Q im 1. Quadranten liegt, gilt $t\in[0,\infty[$.

2 Untersuchen Sie die Kurve mit der unter 1 angegebenen Parameterdarstellung für $t\in\mathbb{R}$. (Achsenschnittpunkte, Steigung in den Achsenschnittpunkten, waagrechte und senkrechte Tangenten, Verhalten für $t\rightarrow\pm\infty$, Skizze des Graphen)

Ableitungen und Steigung

$$x'=1-2t \;;\; y'=1+2t \;\rightarrow\; m=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{y'}{x'}=\frac{1+2t}{1-2t}$$

Achsenschnittpunkte

x-Achse: $y=0 \rightarrow t+t^2=0 \rightarrow t\cdot(t+1)=0 \rightarrow t_1=0 \;;\; t_2=-1$

$t_1=0 \rightarrow x_1=0 \;;\; y_1=0 \;;\; m_1=1$

$t_2=-1 \rightarrow x_2=-2 \;;\; y_2=0 \;;\; m_2=-\frac{1}{3}$

y-Achse: $x=0 \rightarrow t-t^2=0 \rightarrow t\cdot(1-t)=0 \rightarrow t_1=0 \;;\; t_3=+1$

$t_3=+1 \rightarrow x_3=0 \;;\; y_3=2 \;;\; m_3=-3$

waagrechte Tangenten: $y'=0 \rightarrow 1+2t=0 \rightarrow t=-\frac{1}{2}\ ;\ x=-\frac{3}{4}\ ;\ y=-\frac{1}{4}$

senkrechte Tangenten: $x'=0 \rightarrow 1-2t=0 \rightarrow t=+\frac{1}{2}\ ;\ x=\frac{1}{4}\ ;\ y=\frac{3}{4}$

Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$:

$t \rightarrow +\infty \rightarrow x \rightarrow -\infty\ ;\ y \rightarrow +\infty\ ;\ m \rightarrow -1$

$t \rightarrow -\infty \rightarrow x \rightarrow -\infty\ ;\ y \rightarrow +\infty\ ;\ m \rightarrow -1$

existiert eine schräge Asymptote?
Ansatz: x und y in die Geradengleichung $y=m\cdot x+c$ einsetzen.

(*) $t+t^2=m\cdot(t-t^2)+c$

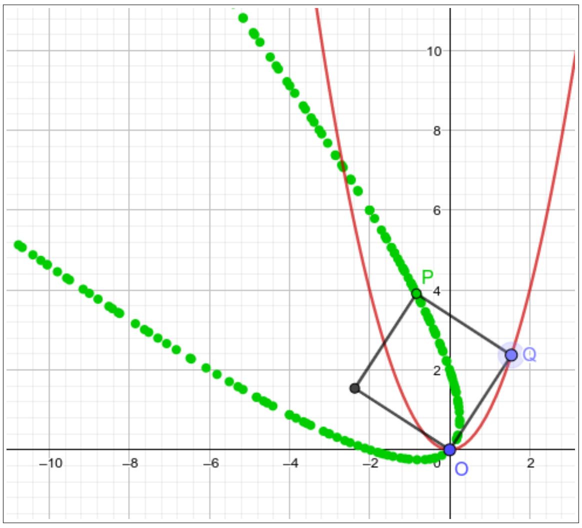
$t^2\cdot(-m-1)+t\cdot(m-1)+c=0$

$(-m-1)+\frac{1}{t}\cdot(m-1)+\frac{1}{t^2}\cdot c=0$

Für $t \rightarrow \pm\infty$ ergibt sich $-m-1=0 \rightarrow m=-1$ (siehe oben).

Einsetzen in (*): $-t+t^2+c=t+t^2 \rightarrow c=2t$

Für $t \rightarrow \pm\infty$ gilt damit auch $c \rightarrow \pm\infty$.
Es gibt also keine schräge Asymptote.



3 Der Graph schließt im 1. Quadranten mit der y-Achse ein Flächenstück vollständig ein. Berechnen Sie den Flächeninhalt dieser Fläche.

Formel zur Flächenberechnung: $A=\frac{1}{2}\cdot\int_{t_1}^{t_2}(x\,y'-x'\,y)\,dt$

In 1 wurden für die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen die Werte $t_1=0$ und $t_2=1$ gefunden.

$$A=\frac{1}{2}\cdot\int_0^1((t-t^2)(1+2t)-(1-2t)(t+t^2))\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\int_0^1 t+2t^2-t^2-2t^3-t-t^2+2t^2+2t^3\,dt=\frac{1}{2}\int_0^1 2t^2\,dt=\int_0^1 t^2\,dt=\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}-0=\frac{1}{3}$$

Der gesuchte Flächeninhalt beträgt also $\frac{1}{3}$ Flächeneinheiten.

4 Ermitteln Sie eine parameterfreie Darstellung der Kurvengleichung in der Form $F(x,y)=0$.

Mit $x=t-t^2$ und $y=t+t^2$ gilt $x+y=2t$ → $(x+y)^2=4t^2$ und $y-x=2t^2$ → $2\cdot(y-x)=4t^2$

Daraus folgt $(x+y)^2=2\cdot(y-x)$ oder $(x+y)^2-2\cdot(y-x)=0$

5 Zeigen Sie, dass für zwei t-Werte der Punkt P auf der Parabel liegt und berechnen Sie die Koordinaten der Punkte (Hinweis: ein gesuchter t-Wert liegt zwischen 2 und 3).

Parabelgleichung $y=x^2$ in die Kurvengleichung einsetzen:

$(x+y)^2-2\cdot(y-x)=0$ → $(x+x^2)^2-2\cdot(x^2-x)=0$ → $x^2+2x^3+x^4-2x^2+2x=0$ →

$x\cdot(x^3+2x^2-x+2)=0$ → $x_1=0$

x_2 wird mit dem Newtonverfahren berechnet: $x \leftarrow x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$

$f(x)=x^3+2x^2-x+2$ → $f'(x)=3x^2+4x-1$

$$x \leftarrow x-\frac{x^3+2x^2-x+2}{3x^2+4x-1}=\frac{3x^3+4x^2-x-x^3-2x^2+x-2}{3x^2+4x-1}=\frac{2x^3+2x^2-2}{3x^2+4x-1}$$

Mit dem Startwert $x_0=-2$ ergeben sich folgende Näherungswerte:

$x_0=-2$; $x_1=-3{,}3333$; $x_2=-2{,}8343$; $x_3=-2{,}6755$; $x_4=-2{,}6591$; $x_5=-2{,}6590=x_6$

Der zugehörige y-Wert ist $y=7{,}0701$.

Die gesuchten Punkte sind (0/0) und (-2,6590/7,0701).

Alternativ lässt sich das Ergebnis auch finden mit dem Ansatz

$y=t+t^2 \overset{\text{Parabel } y=x^2}{=} x^2=(t-t^2)^2$ → $(t-t^2)^2-(t+t^2)=0$ → $t^2-2t^3+t^4-t-t^2=0$ → $t\cdot(t^3-2t^2-1)=0$

$t=0$ liefert die erste Lösung (0/0).

$t^3-2t^2-1=0$ wird wie oben mit dem Newtonverfahren gelöst und ergibt $t=2{,}2056$ und daraus den Punkt (-2,6590/7,0701).