Thema: Kurvenschar mit gebrochenrationaler Funktion (1989)

Gegeben ist die Funktionenschar f_a mit der Gleichung $f_a(x)=\frac{x^2-x+a}{x+1}$ mit $a\in\mathbb{R}$.

1 Untersuchen Sie die Funktionenschar.
Untersuchungspunkte: Definitionsbereich, Verhalten an den Definitionsgrenzen, Schnittpunkte mit Koordinatenachsen, waagrechte Tangenten, Wendepunkte, Asymptoten.

Definitionsbereich: $\mathbb{D}=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

Verhalten an den Definitionsgrenzen:

$$x\rightarrow\pm\infty \rightarrow f_a(x)\rightarrow\pm\infty$$

$$f_a(x)=\frac{x^2-x+a}{x+1}=(x^2-x+a):(x+1)=x-2+\frac{a-2}{x+1}$$

$$\begin{array}{l} \underline{x^2+x} \\ -2x+a \\ \underline{-2x-2} \\ \quad a-2 \end{array}$$

$$x\rightarrow-1 \ ; \ x>-1 \rightarrow f_a(x)\rightarrow+\infty \text{ für } a>-2 \ ; f_a(x)\rightarrow-\infty \text{ für } a<-2 \ ; f_a(x)\rightarrow-3 \text{ für } a=-2$$

$$x\rightarrow-1 \ ; \ x<-1 \rightarrow f_a(x)\rightarrow-\infty \text{ für } a>-2 \ ; f_a(x)\rightarrow+\infty \text{ für } a<-2 \ ; f_a(x)\rightarrow-3 \text{ für } a=-2$$

Nullstelle: $x^2-x+a=0 \rightarrow x_{1,2}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-a}$

2 Nullstellen für $a<\frac{1}{4}$; 1 Nullstelle für $a=\frac{1}{4}$; 0 Nullstellen für $a>\frac{1}{4}$

y-Achsenabschnitt: $f_a(0)=a$

waagrechte Tangenten:

$$f_a'(x)=\frac{(2x-1)(x+1)-(x^2-x+a)\cdot1}{(x+1)^2}=\frac{2x^2+2x-x-1-x^2+x-a}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x-1-a}{(x+1)^2}$$

$$f_a''(x)=\frac{(2x+2)(x+1)-(x^2+2x-1-a)\cdot2}{(x+1)^3}=\frac{2x^2+2x+2x+2-2x^2-4x+2+2a}{(x+1)^3}=\frac{4+2a}{(x+1)^3}$$

$$f_a'(x)=0 \rightarrow x^2+2x-1-a=0 \rightarrow x_{1,2}=-1\pm\sqrt{1+1+a}=-1\pm\sqrt{2+a}$$

$$f_a''(-1\pm\sqrt{2+a})=\frac{4+2a}{\left(-1\pm\sqrt{2+a}+1\right)^3}=\frac{4+2a}{\left(\pm\sqrt{2+a}\right)^3}=\frac{2\cdot(2+a)}{\pm\sqrt{2+a}\cdot(2+a)}=\frac{2}{\pm\sqrt{2+a}}$$

Für "+" liegt ein Minimum vor, für "-" ein Maximum, aber nur für $a>-2$.
Für $a\leq-2$ gibt es keine waagrechte Tangenten.

Wendepunkte:

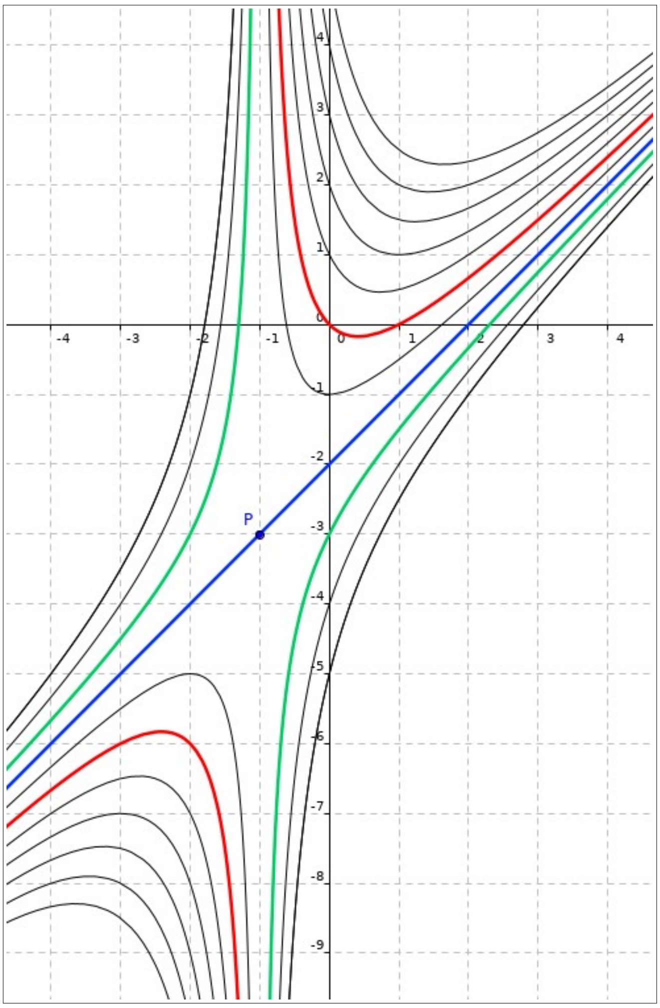
Bis auf den Fall $a=-2$ wird die 2. Ableitung nicht zu 0. Es gibt also keine Wendepunkte.
Der Fall $a=-2$ wird weiter unten untersucht.

Asymptoten:

Es existiert eine Polstelle ungerader Ordnung bei $x=-1$. Dort gibt es also eine senkrechte Asymptote.

Aus $f_a(x)=\dfrac{x^2-x+a}{x+1}=(x^2-x+a):(x+1)=x-2+\dfrac{a-2}{x+1}$ folgt, dass $y=x-2$ schräge Asymptote ist.

2 Untersuchen Sie mit Hilfe der von Ihnen zu skizzierenden Graphen für $a=0$ und $a=-3$, welchen Einfluss der Parameter a auf die Art des Graphen hat. Gibt es Sonderfälle?



Graphen in

rot: a=0 ; grün: a=-3 ; blau: a=-2

Den a-Wert des Graphen erkennt man am Schnittpunkt mit der y-Achse.

Wie weiter oben schon gezeigt gilt:

Hoch- und Tiefpunkt für a>-2

keine waagrechte Tangenten für a<-2

Sonderfall a=-2: Gerade mit hebbarer Lücke bei x=-1 (siehe Aufgabe 3).

Nullstellen nur für $a\le\dfrac{1}{4}$ (siehe oben).

3 Welche Bedeutung hat der Punkt mit den Koordinaten $(-1/-3)$ für die Graphen der Schar? Beweisen Sie Ihre Vermutung.

Der Punkt ist Symmetriepunkt für alle Graphen.

Bedingung für Punktsymmetrie:

$f(x)=2v-f(2u-x)$ mit $u=-1$; $v=-3$, also $f(x)=-6-f(-2-x)$

$$-6-f(-2-x)=-6-\frac{(-2-x)^2-(-2-x)+a}{-2-x+1}=\frac{6+6x}{-1-x}-\frac{4+4x+x^2+2+x+a}{-1-x}=\frac{-x^2+x-a}{-1-x}=\frac{x^2-x+a}{x+1}=f(x)$$

4 Untersuchen Sie, ob zwei verschiedene Kurven der Schar einen oder mehrere Punkte gemeinsam haben können.

Gesucht ist $f_a(x)=f_b(x)$ mit $a\ne b$.

$$\frac{x^2-x+a}{x+1}=\frac{x^2-x+b}{x+1}\;\rightarrow\; x^2-x+a=x^2-x+b \;\rightarrow\; a=b$$

Widerspruch zur Voraussetzung, also existieren keine Schnittpunkte.