Lösung *Version 2007-06-29*

1 Berechne die Lösungen und gib die Lösungsmengen an:

a) $3x^2-18x=0 \overset{:3}{\Rightarrow} x^2-6x=0 \Rightarrow x\cdot(x-6)=0 \Rightarrow x_1=0; x_2=6 \Rightarrow L=\{0;6\}$

b) $5x^2-20x+30=0 \overset{:5}{\Rightarrow} x^2-4x+6=0 \Rightarrow x_{1,2}=2\pm\sqrt{4-6}=2\pm\sqrt{-2} \Rightarrow L=\{\}$

c) $2y=4-8y^2 \overset{+8y^2-4}{\Rightarrow} 8y^2+2y-4=0 \overset{:8}{\Rightarrow} y^2+\frac{1}{4}y-\frac{1}{2}=0 \Rightarrow y_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{2}{4}}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{3}{4}} \Rightarrow$

$L=\left\{\frac{-1}{2}+\sqrt{\frac{3}{4}}\ ;\ -\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{3}{4}}\right\}$

d) $z^2-1{,}44=0 \overset{+1{,}44}{\Rightarrow} z^2=1{,}44 \Rightarrow z_{1,2}=\pm\sqrt{1{,}44}=\pm 1{,}2 \Rightarrow L=\{z_1=1{,}2\ ;\ z_2=-1{,}2\}$

e) $3+2x^2+5=0 \overset{-8}{\Rightarrow} 2x^2=-8 \overset{:2}{\Rightarrow} x^2=-4 \Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{-4} \Rightarrow L=\{\}$

f) $\sqrt{x-3}=5-x \overset{()^2}{\Rightarrow} x-3=(5-x)^2 \Rightarrow x-3=25-10x+x^2 \overset{-x+3}{\Rightarrow} x^2-11x+28=0 \Rightarrow$

$x_{1,2}=\frac{11}{2}\pm\sqrt{\frac{121}{4}-\frac{112}{4}}=\frac{11}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{11}{2}\pm\frac{3}{2} \Rightarrow x_1=\frac{14}{2}=7\ ;\ x_2=\frac{8}{2}=4 \Rightarrow L=\{4\}$

Die Lösung x=7 entfällt, da $\sqrt{7-3}\neq 5-7$

g) $(x-2)(3-2x)=0 \overset{\text{jede Klammer}=0}{\Rightarrow} x_1=2\ ;\ x_2=\frac{3}{2} \Rightarrow L=\left\{2;\frac{3}{2}\right\}$

h) $2x^4-16x^2-18=0 \overset{:2}{\Rightarrow} x^4-8x^2-9=0 \overset{z=x^2}{\Rightarrow} z^2-8z-9=0 \Rightarrow z_{1,2}=4\pm\sqrt{16+9}=4\pm\sqrt{25}=4\pm 5$

$\Rightarrow z_1=9=x_{11,12}^2\ ;\ z_2=-1=x_{21,22}^2 \Rightarrow x_{11}=+3\ ;\ x_{12}=-3\ ;\ x_{21}$ *und* x_{22} *sind nicht reell* $\Rightarrow$

$L=\{3;-3\}$

i) $8+x^2=9x \overset{-9x}{\Rightarrow} x^2-9x+8=0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{9}{2}\pm\sqrt{\frac{81}{4}-\frac{32}{4}}=\frac{9}{2}\pm\sqrt{\frac{49}{4}}=\frac{9}{2}\pm\frac{7}{2} \Rightarrow x_1=\frac{16}{2}=8\ ;$

$x_2=\frac{2}{2}=1 \Rightarrow L=\{8;1\}$

k) $4x^2+1=4x \overset{-4x}{\Rightarrow} 4x^2-4x+1=0 \overset{:4}{\Rightarrow} x^2-x+\frac{1}{4}=0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}}=\frac{1}{2} \Rightarrow L=\left\{\frac{1}{2}\right\}$

l) $(10-5x)^2-(x-2)^2=24\cdot(x^2-4) \Rightarrow 100-100x+25x^2-x^2+4x-4=24x^2-96 \overset{-24x^2+96}{\Rightarrow}$

$-96x+192=0 \overset{:(-96)}{\Rightarrow} x-2=0 \overset{+2}{\Rightarrow} x=2 \Rightarrow L=\{2\}$

2 Löse nach dem Satz von Vieta. Dokumentiere Deine Überlegungen in übersichtlicher Form.

$x^2 - 13x + 30 = 0$

Die 30 wird in Faktoren zerlegt: $30 = 1 \cdot 30 = 2 \cdot 15 = 3 \cdot 10 = 5 \cdot 6$

Die Faktoren werden summiert: $1 + 30 = 31\,;\, 2 + 15 = 17\,;\, 3 + 10 = 13\,;\, 5 + 6 = 11$

Da die Summe 13 als Koeffizient vor dem x steht, sind die Zahlen 3 und 10 die Lösungen, denn nach Vieta gilt bei einer quadratischen Gleichung der Form $x^2 + px + q = 0$: $x_1 \cdot x_2 = q$ *und* $x_1 + x_2 = -p$

Da $3 \cdot 10 = 30$ *und* $3 + 10 = 13 = -(-13)$, *gilt* $L = \{3\,;\,10\}$

---

3 Zwei Zahlen sind gesucht. Multipliziert man die Zahlen, so ergibt sich 240. Subtrahiert man die Zahlen, so ergibt sich 8. Berechne die Zahlen.

Die Zahlen seien x und y. Es gilt dann $x \cdot y = 240$ *und* $x - y = 8 \Rightarrow x = y + 8$. *Einsetzen in die erste Gleichung:* $(y+8) \cdot y = 240 \overset{-240}{\Rightarrow} y^2 + 8y - 240 = 0 \quad y_{1,2} = -4 \pm \sqrt{16 + 240} = -4 \pm \sqrt{256} = -4 \pm 16 \Rightarrow$

$y_1 = -4 + 16 = 12 \Rightarrow x_1 = 12 + 8 = 20 \;;\; y_2 = -4 - 16 = -20 \Rightarrow x_2 = -20 + 8 = -12$

Es gibt 2 Lösungen, denn $x_1 \cdot y_1 = 20 \cdot 12 = 240$ *und* $x_1 - y_1 = 20 - 12 = 8$, *aber auch*
$x_2 \cdot y_2 = (-12) \cdot (-20) = +240$ *und* $x_2 - y_2 = (-12) - (-20) = +8$

Die Lösungsmenge für die beiden Wertepaare (x/y) ist also $L = \{(20/12)\,;\,(-12)/(-20)\}$

---

4 Beim radioaktiven Zerfall stellt man Folgendes fest: Teilt man die vorhandene Teilchenzahl durch einen festen Wert (der von dem jeweiligen Isotop[1] abhängig ist), so erhält man die Teilchenzahl, die nach einer weiteren Minute noch vorhanden ist. Das gilt unabhängig davon, wie viele Teilchen vorhanden sind.
Nun sind von einem Stoff zu Beginn der Messzeit 9633 Teilchen vorhanden und nach 2 Minuten noch 57 Teilchen. Berechne, wie viele Teilchen 1 Minute nach Beginn der Messzeit noch vorhanden waren.

Ist x die konstante Zahl, durch die man dividieren muss, so gilt $\frac{9633}{x^2} = 57 \overset{\cdot x^2 : 57}{\Rightarrow} \frac{9633}{57} = x^2 \Rightarrow$

$x = \sqrt{\frac{9633}{57}} = \sqrt{169} = 13$. *Die negative Lösung fällt weg, da es hier keinen Sinn macht, durch eine negative Zahl zu dividieren. Die Teilchenzahl nach 1 Minute ergibt sich nun aus* $\frac{9633}{13} = 741$.

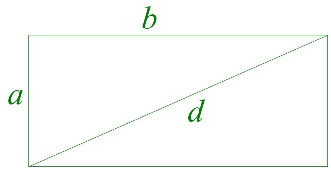
Nach 1 Minute sind also noch 741 Teilchen vorhanden.

In Wirklichkeit macht es natürlich keinen Sinn, die Teilchenzahl so exakt anzugeben, weil der radioaktive Zerfall zufällig erfolgt: Es gibt keine feststellbare Ursache, die den radioaktiven Zerfall eines bestimmten Teilchens auslöst.
Man kann nur eine Wahrscheinlichkeitsaussage machen, die dann für eine sehr große Anzahl von gleichartigen Teilchen eine Vorhersage macht, die mit um so größerer Wahrscheinlichkeit eintritt, je größer die Anzahl der Teilchen ist.

---

1 Isotop: Angehöriger eines chemischen Elementes, unterschieden nach Anzahl der Neutronen

5 Bei einem Rechteck ist eine Seite um 2 cm länger als die andere Seite. Die Diagonale ist 10 cm lang. Berechne die Längen der Rechtecksseiten.



Es gelten laut Angabe und nach dem Satz des Pythagoras folgende Beziehungen zwischen den Längen a, b und d:

$(1) \quad b = a + 2$

$(2) \quad d = 10$

$(3) \quad a^2 + b^2 = d^2$

(1) und (2) in (3) einsetzen: $a^2 + (a+2)^2 = 100 \;\Rightarrow\; a^2 + a^2 + 4a + 4 = 100 \;\overset{-100}{\Rightarrow}\; 2a^2 + 4a - 96 = 0 \;\overset{:2}{\Rightarrow}$

$a^2 + 2a - 48 = 0 \;\Rightarrow\; a_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+48} = -1 \pm \sqrt{49} = -1 \pm 7 \;\Rightarrow\; a_1 = 6 \;;\; a_2 = -8$

Da es keine negativen Seitenlängen gibt, fällt die Lösung a_2 weg.

Aus $a = 6$ *folgt* $b = 6 + 2 = 8$ *. Das Rechteck hat also die Seitenlängen 6 cm und 8 cm.*

Viel Erfolg beim

Bearbeiten der

Aufgaben!