Zentraler elastischer Stoß

Bei der folgenden Rechnung wird angenommen, dass sich eine punktförmige Masse m_1 mit der Geschwindigkeit v_1 auf einer Geraden auf eine ruhende punktförmige Masse m_2 zu bewegt und mit ihr zusammenstößt.
Die beiden Stoßpartner werden sich dann nach dem Stoß auf dieser Geraden mit den Geschwindigkeiten v_1' und v_2' weiter bewegen.
In der realen Welt gibt es keine punktförmigen Massen, aber Billiardkugeln und Flummis verhalten sich bei einem zentralen Stoß näherungsweise so.
Die Annahme $v_2=0$ ist nicht willkürlich: Man kann das jeweilige Bezugssystem immer so wählen, dass die Masse m_2 in Ruhe ist.

Beim Stoß gelten der Impulserhaltungssatz und der Energieerhaltungssatz:
Impulserhaltungssatz (IS): $p_1+p_2=p_1'+p_2' \Rightarrow m_1\cdot v_1+m_2\cdot v_2=m_1\cdot v_1'+m_2\cdot v_2'$
Energieerhaltungssatz (ES): $W_1+W_2=W_1'+W_2' \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot m_1\cdot v_1^2+\frac{1}{2}\cdot m_2\cdot v_2^2=\frac{1}{2}\cdot m_1\cdot v_1'^2+\frac{1}{2}\cdot m_2\cdot v_2'^2$
Die beiden Gleichungen können mit der Bedingung $v_2=0$ vereinfacht werden zu
IS: $m_1\cdot v_1=m_1\cdot v_1'+m_2\cdot v_2'$
ES: $m_1\cdot v_1^2=m_1\cdot v_1'^2+m_2\cdot v_2'^2$

IS wird umgeformt zu $m_1\cdot v_1-m_1\cdot v_1'=m_2\cdot v_2' \Rightarrow m_1\cdot(v_1-v_1')=m_2\cdot v_2' \Rightarrow v_2'=\frac{m_1}{m_2}\cdot(v_1-v_1')$ und eingesetzt in ES:

$$m_1\cdot v_1^2=m_1\cdot v_1'^2+m_2\cdot v_2'^2 \Rightarrow m_1\cdot\left(v_1^2-v_1'^2\right)=m_2\cdot v_2'^2 \Rightarrow m_1\cdot\left(v_1^2-v_1'^2\right)=m_2\cdot\frac{m_1^2}{m_2^2}\cdot(v_1-v_1')^2 \Rightarrow$$

$$m_2\cdot\left(v_1^2-v_1'^2\right)=m_1\cdot(v_1-v_1')^2 \Rightarrow m_2\cdot(v_1-v_1')(v_1+v_1')=m_1\cdot(v_1-v_1')^2 \Rightarrow m_2\cdot(v_1+v_1')=m_1\cdot(v_1-v_1') \Rightarrow$$

$$m_2\cdot v_1+m_2\cdot v_1'=m_1\cdot v_1-m_1\cdot v_1' \Rightarrow v_1'\cdot(m_1+m_2)=v_1\cdot(m_1-m_2) \Rightarrow v_1'=v_1\cdot\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}$$

v_2' ergibt sich damit zu $v_2'=\frac{m_1}{m_2}\cdot(v_1-v_1')=\frac{m_1}{m_2}\cdot\left(v_1-v_1\cdot\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right)=v_1\cdot\left(\frac{m_1}{m_2}\cdot\left(1-\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right)\right) \Rightarrow$

$$v_2'=v_1\cdot\left(\frac{m_1}{m_2}\cdot\frac{m_1+m_2-m_1+m_2}{m_1+m_2}\right)=v_1\cdot\left(\frac{m_1}{m_2}\cdot\frac{2\cdot m_2}{m_1+m_2}\right)=v_1\cdot\frac{2\cdot m_1}{m_1+m_2}$$

Die Geschwindigkeiten nach dem Stoß betragen also $v_1'=v_1\cdot\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}$ und $v_2'=v_1\cdot\frac{2\cdot m_1}{m_1+m_2}$

Beispiele:

a) $m_1=0{,}2\,kg\,;\,m_2=1{,}0\,kg \Rightarrow v_1'=v_1\cdot\frac{-0{,}8\,kg}{1{,}2\,kg}=-\frac{2}{3}\cdot v_1 \Rightarrow v_2'=v_1\cdot\frac{0{,}4\,kg}{1{,}2\,kg}=+\frac{1}{3}\cdot v_1$

b) $m_1=1{,}0\,kg\,;\,m_2=1{,}0\,kg \Rightarrow v_1'=v_1\cdot\frac{0\,kg}{2{,}0\,kg}=0\cdot v_1 \Rightarrow v_2'=v_1\cdot\frac{2{,}0\,kg}{2{,}0\,kg}=+1\cdot v_1$

c) $m_1=5{,}0\,kg\,;\,m_2=1{,}0\,kg \Rightarrow v_1'=v_1\cdot\frac{4{,}0\,kg}{6{,}0\,kg}=+\frac{2}{3}\cdot v_1 \Rightarrow v_2'=v_1\cdot\frac{10{,}0\,kg}{6{,}0\,kg}=+\frac{5}{3}\cdot v_1$