Dezentraler elastischer Stoß

Bei der folgenden Rechnung wird angenommen, dass sich eine punktförmige Masse m_1 mit der Geschwindigkeit v_1 auf einer Geraden auf eine ruhende punktförmige Masse m_2 zu bewegt und mit ihr zusammenstößt.

Die beiden Stoßpartner werden sich dann nach dem Stoß mit den Geschwindigkeiten $v_1{}'$ und $v_2{}'$ weiter bewegen.

In der realen Welt gibt es keine punktförmigen Massen, aber Billiardkugeln und Flummis verhalten sich bei einem zentralen Stoß näherungsweise so.

Die Annahme $v_2=0$ ist nicht willkürlich: Man kann das jeweilige Bezugssystem immer so wählen, dass die Masse m_2 in Ruhe ist.

Beim Stoß gelten der Impulserhaltungssatz und der Energieerhaltungssatz:

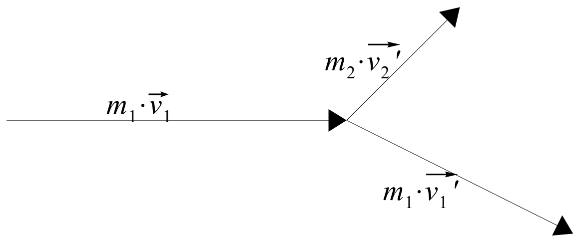
Impulserhaltungssatz (IS): $p_1+p_2=p_1{}'+p_2{}' \Rightarrow m_1 \cdot v_1+m_2 \cdot v_2=m_1 \cdot v_1{}'+m_2 \cdot v_2{}'$

Energieerhaltungssatz (ES): $W_1+W_2=W_1{}'+W_2{}' \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2+\frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2=\frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1{}'^2+\frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2{}'^2$

Die beiden Gleichungen können mit der Bedingung $v_2=0$ vereinfacht werden zu

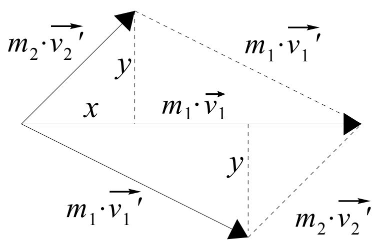
IS: $m_1 \cdot v_1=m_1 \cdot v_1{}'+m_2 \cdot v_2{}'$

ES: $m_1 \cdot v_1^2=m_1 \cdot v_1{}'^2+m_2 \cdot v_2{}'^2$



Ist der Stoß nicht zentral, muss bei den Impulsen mit Vektoren gerechnet werden.

Da die Summe der Impulse vor dem Stoß gleich der Summe der Impulse nach dem Stoß sein muss, kann man das Impulsdiagramm auch so zeichen:



Da vor dem Stoß nur ein Impuls in waagrechter Richtung vorhanden war, muss das auch nach dem Stoß so sein: Man sieht, dass die senkrechten Komponenten (Länge y) der beiden gestrichenen Vektoren sich gegenseitig aufheben.

Nun soll der Ort (x/y) der Spitze des Vektors $m_2 \cdot \vec{v_2}{}'$ berechnet werden. Dazu wird zweimal der Satz des Pythagoras in der unteren Zeichnung angewendet:

$x^2+y^2=m_2^2 \cdot v_2{}'^2$ und $(m_1 \cdot v_1-x)^2+y^2=m_1^2 \cdot v_1{}'^2$

Diese Gleichungen werden nach $v_1{}'^2$ und $v_2{}'^2$ aufgelöst und dann in ES eingesetzt:

$v_1{}'^2=\frac{(m_1 \cdot v_1-x)^2+y^2}{m_1^2}$ und $v_2{}'^2=\frac{x^2+y^2}{m_2^2}$

$$m_1 \cdot v_1^2=m_1 \cdot \frac{(m_1 \cdot v_1-x)^2+y^2}{m_1^2}+m_2 \cdot \frac{x^2+y^2}{m_2^2}=\frac{(m_1 \cdot v_1-x)^2+y^2}{m_1}+\frac{x^2+y^2}{m_2}=\frac{m_2 \cdot (m_1 \cdot v_1-x)^2+m_2 \cdot y^2+m_1 \cdot x^2+m_1 \cdot y^2}{m_1 \cdot m_2}$$

$$=\frac{m_1^2 \cdot m_2 \cdot v_1^2-2 \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot v_1 \cdot x+m_2 \cdot x^2+m_2 \cdot y^2+m_1 \cdot x^2+m_1 \cdot y^2}{m_1 \cdot m_2}=\frac{m_1+m_2}{m_1 \cdot m_2} \cdot x^2-2 \cdot v_1 \cdot x+\frac{m_1+m_2}{m_1 \cdot m_2} \cdot y^2+m_1 \cdot v_1^2 \Rightarrow$$

Dividieren durch $\frac{m_1+m_2}{m_1 \cdot m_2}$: $x^2-2 \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1+m_2} \cdot v_1 \cdot x+y^2=0 \Rightarrow \left(x-\frac{m_1 \cdot m_2}{m_1+m_2} \cdot v_1\right)^2+y^2=\left(\frac{m_1 \cdot m_2}{m_1+m_2} \cdot v_1\right)^2$

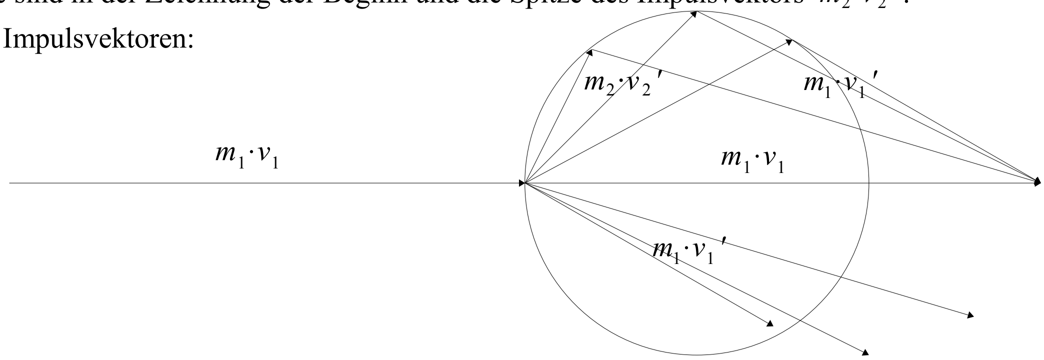
Das ist die Gleichung eines Kreises mit dem Radius $r=\frac{m_1 \cdot m_2}{m_1+m_2} \cdot v_1$: $(x-r)^2+y^2=r^2$

Das Besondere an diesem Kreis ist, dass er durch den Koordinaten-Ursprung verläuft (0/0) und durch den

Punkt (x/y).

Diese beiden Punkte sind in der Zeichnung der Beginn und die Spitze des Impulsvektors $m_2 \cdot v_2{}'$.

Beispiele für einige Impulsvektoren:



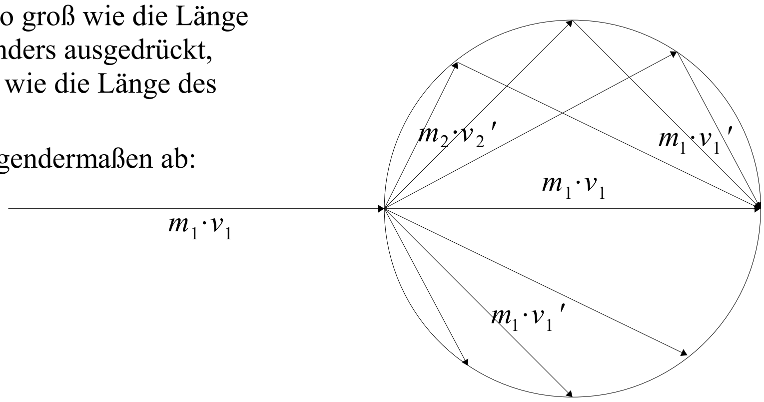
Sonderfälle:

1. $m_1 = m_2$

Die Kreisgleichung vereinfacht sich zu $\left(x - \frac{m^2}{2m} \cdot v_1\right)^2 + y^2 = \left(\frac{m^2}{2m} \cdot v_1\right)^2 \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1\right)^2$,

d. h. der Radius des Kreises ist ist halb so groß wie die Länge des Impulsvektors vor dem Stoß, oder anders ausgedrückt, der Durchmesser des Kreises ist so groß wie die Länge des Impulsvektors vor dem Stoß.

Die Zeichnung oben ändert sich also folgendermaßen ab:



Der Satz des Thales gibt uns eine Information über den Winkel, der jeweils zwischen den Impulsen $m_1 \cdot v_1{}'$ und $m_2 \cdot v_2{}'$ besteht:

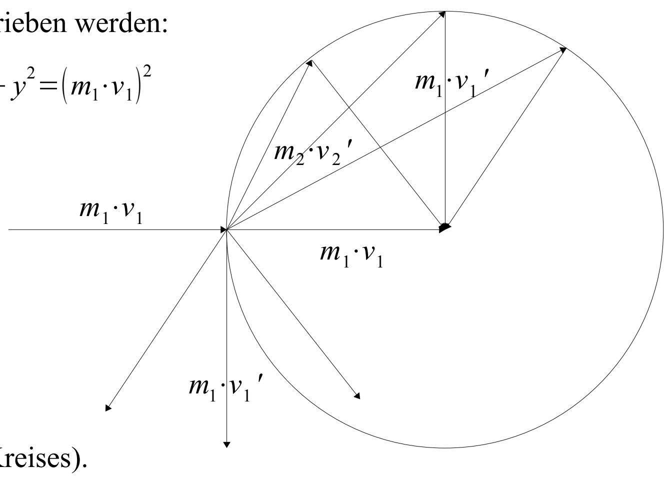
Es sind immer genau 90°.

---

2. $m_1 \ll m_2$

In guter Näherung kann die Kreisgleichung so geschrieben werden:

$$\left(x - \frac{m_1 \cdot m_2}{m_2} \cdot v_1\right)^2 + y^2 = \left(\frac{m_1 \cdot m_2}{m_2} \cdot v_1\right)^2 \Rightarrow \left(x - m_1 \cdot v_1\right)^2 + y^2 = \left(m_1 \cdot v_1\right)^2$$



Wie nebenstehende Abbildung zeigt, haben die Impulsvektoren der Masse 1 nach dem Stoß immer die gleiche Länge wie vor dem Stoß, d. h. die Geschwindigkeit der Masse 1 ändert sich nicht, aber alle Richtungen sind möglich.

Die Masse 2 kann höchstens den doppelten Impuls wie die Masse 1 erhalten (Durchmesser des Kreises).

Je größer die Masse m_2 ist, desto kleiner kann also nur ihre Geschwindigkeit werden. Im Grenzfall $m_2 \rightarrow \infty$ bewegt sich die Masse 2 überhaupt nicht mehr.

---

3. $m_1 \gg m_2$

In guter Näherung kann die Kreisgleichung so geschrieben werden:

$$\left(x - \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1} \cdot v_1\right)^2 + y^2 = \left(\frac{m_1 \cdot m_2}{m_1} \cdot v_1\right)^2 \Rightarrow \left(x - m_2 \cdot v_1\right)^2 + y^2 = \left(m_2 \cdot v_1\right)^2$$

Im Extremfall (zentraler Stoß) gilt $m_2 \cdot v_2{}' = 2 \cdot r = 2 \cdot m_2 \cdot v_1 \Rightarrow v_2{}' = 2 \cdot v_1$

Die Geschwindigkeit der Masse 2 wird also maximal 2-mal so groß wie die Geschwindigkeit der Masse 1.