2007-06-22 Klausur 4 Klasse 11a Mathematik

Lösung *Version 2007-06-23*

1 Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x)=\frac{1}{6}\cdot x^3-\frac{1}{2}\cdot x^2-\frac{2}{3}\cdot x$

a) Untersuchen Sie die Funktion auf das Globalverhalten, auf Schnitte mit den Koordinatenachsen, auf Hoch- und Tiefpunkte und auf Wendepunkte.

Globalverhalten: *Da grad(f)=3 und der Koeffizient von x^3 positiv ist, gilt für den Graph für* $x\to+\infty$: $y\to+\infty$ *und es gilt für* $x\to-\infty$: $y\to-\infty$.

Schnitt mit y-Achse: $f(0)=0$ *, also wird die y-Achse bei (0/0) geschnitten.*

Schnitte mit x-Achse: $f(x)=\frac{1}{6}\cdot x^3-\frac{1}{2}\cdot x^2-\frac{2}{3}\cdot x=\frac{1}{6}\cdot x\cdot(x^2-3\cdot x-4)=0$ *erste Lösung:* $x_1=0$

weitere Lösungen: $x^2-3x-4=0 \Rightarrow x_{2,3}=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}+4}=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{3}{2}\pm\frac{5}{2}$

$x_2=\frac{3}{2}+\frac{5}{2}=\frac{8}{2}=4$; $x_3=\frac{3}{2}-\frac{5}{2}=-\frac{2}{2}=-1$

Hoch- und Tiefpunkte: $f'(x)=\frac{1}{2}\cdot x^2-x-\frac{2}{3}\overset{!}{=}0 \Rightarrow x^2-2x-\frac{4}{3}=0 \Rightarrow x_{1,2}=1\pm\sqrt{1+\frac{4}{3}}=1\pm\sqrt{\frac{7}{3}}$

$f''(x)=x-1 \Rightarrow f''(1\pm\sqrt{\frac{7}{3}})=1\pm\sqrt{\frac{7}{3}}-1=\pm\sqrt{\frac{7}{3}}$ *also: HP bei* $-\sqrt{\frac{7}{3}}$ *und TP bei* $+\sqrt{\frac{7}{3}}$

Wendepunkte: $f''(x)=x-1\overset{!}{=}0 \Rightarrow x=1 \quad f'''(x)=1>0 \Rightarrow$ *Wendepunkt von rechts nach links*

b) Zeigen Sie rechnerisch, dass der Graph symmetrisch zum Punkt (1/-1) ist.

Ist eine Kurve punktsymmetrisch zum Punkt (u/v), so gilt $f(x)=-f(-x+2u)+2v$.

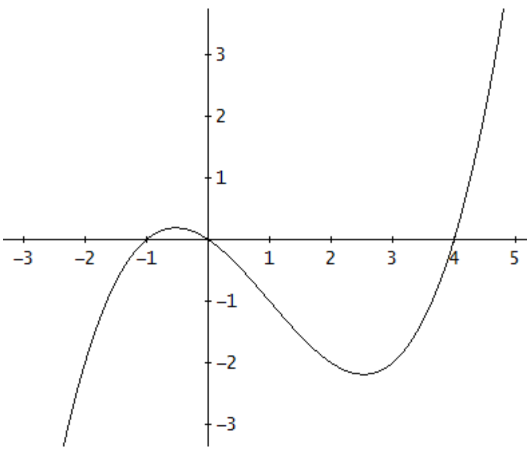
Hier gilt $u=1$ *und* $v=-1 \Rightarrow$ *zu zeigen ist* $f(x)=-f(-x+2)-2$

$$-f(-x+2)-2=-\left(\frac{1}{6}\cdot(-x+2)^3-\frac{1}{2}\cdot(-x+2)^2-\frac{2}{3}\cdot(-x+2)\right)-2=$$

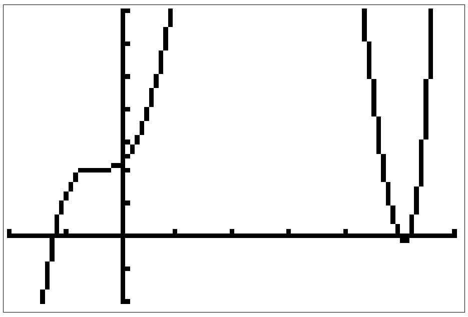
$$-\left(\frac{1}{6}\cdot(-x^3+6x^2-12x+8)-\frac{1}{2}\cdot(x^2-4x+4)+\frac{2}{3}\cdot x-\frac{4}{3}\right)-2=$$

$$\frac{1}{6}\cdot x^3-x^2+2x-\frac{8}{6}+\frac{1}{2}\cdot x^2-2x+2-\frac{2}{3}\cdot x+\frac{4}{3}-2=\frac{1}{6}\cdot x^3-\frac{1}{2}\cdot x^2-\frac{2}{3}\cdot x=f(x) \quad q.e.d.$$

c) Skizzieren Sie den Graph der Funktion so, wie er aus den Ergebnissen des Aufgabenteils a) folgt.

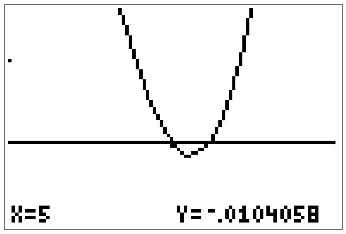


2 Gegeben ist die Funktion mit der Gleichung
$f(x)=0{,}12\cdot x^5-1{,}06\cdot x^4+1{,}56\cdot x^3+3{,}30\cdot x^2+1{,}54\cdot x+2{,}30$



Der vom Taschenrechner stammende Screenshot rechts zeigt einen Teil des Funktionsgraphen.
Die Kurve scheint bei $x=5$ die x-Achse zu berühren, also eine doppelte Nullstelle zu besitzen.
Bei $x=-0{,}5$ scheint ein Sattelpunkt vorzuliegen.

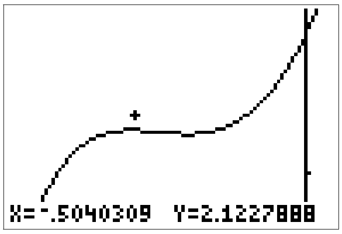
Überprüfen Sie mit dem Taschenrechner diese Vermutungen und machen Sie genauere Angaben zu den angesprochenen Stellen (Werte angeben, Art und x-Koordinaten der Stellen mit besonderen Eigenschaften angeben).

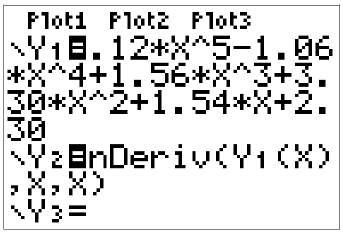


Stelle bei x=5: *Der Taschenrechner zeigt bei Vergrößerung das rechts stehende Bild. Man erkennt, dass die Kurve die x-Achse nicht berührt, sondern die x-Achse bei x=5 zweimal schneidet.*

Mit der Taschenrechner-Funktion SOLVER ergeben sich die beiden Nullstellen $x_1=5$ *und* $x_2=5.1766127730648$

Stelle bei x=-0,5: *Der Taschenrechner zeigt bei Vergrößerung das rechts stehende Bild. Man erkennt, dass die Kurve an dieser Stelle keinen Sattelpunkt, sondern einen Hoch- und einen Tiefpunkt besitzt.*





Lässt man als Funktion Y_2 die Ableitung der gegebenen Funktion berechnen (siehe Bild) und sucht dann mit SOLVER die Nullstellen von Y_2, so erhält man die x-Werte der Hoch- und Tiefpunkte zu $x_1=-0.51309929508195$ *(Hochpunkt) und* $x_2=-0.3465197306427$ *(Tiefpunkt).*

---

3 Eine neu zu bauende 400-m-Laufbahn soll aus 2 geraden Teilstücken und zwei angesetzten Halbkreisen bestehen (wie bei unserer Schule ➞).

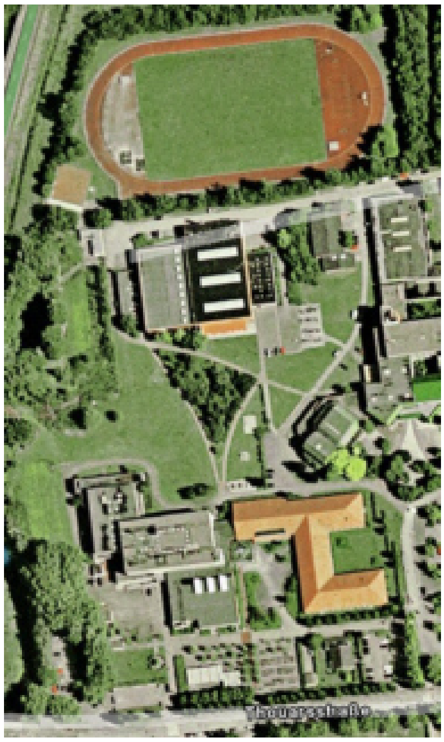


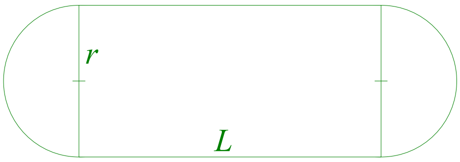
Abb. 1: GFS - Google-Earth

Im durch die beiden geraden Stücke begrenzten mittleren Bereich soll für ein Fußballfeld ein Rechteck mit möglichst großer Fläche entstehen.

a) Berechnen Sie Breite und Länge dieses Fußballfeldes.

b) Untersuchen Sie, ob solch ein Fußballfeld den Normen entspricht:
45m bis 90m Breite und 90m bis 120m Länge (Angaben nach http://de.wikipedia.org/wiki/Fu%C3%9Fballfeld).

zu a):

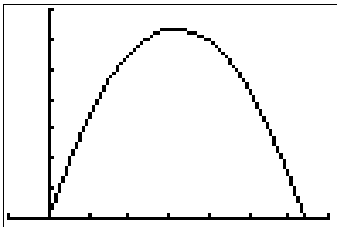


Bekannt ist der Umfang der Figur:
$U=2\pi r+2L=400$

Gesucht ist die maximale Rechtecksfläche $A(r,L)=2rL$.

Aus der Umfangsgleichung ergibt sich $2L=400-2\pi r$

Einsetzen in die Flächengleichung: $A(r)=400r-2\pi r^2$



Der Graph dieser Gleichung (x-Achse in 10-er und y-Achse in 1000-er unterteilt) zeigt ein Maximum bei etwas mehr als 30).

Zur Bestimmung des Maximums wird die Ableitung gebildet:

$$A'(r)=400-4\pi r\overset{!}{=}0 \;\Rightarrow\; r=\frac{100}{\pi}\approx 31{,}83 \;\Rightarrow\; 2r=\frac{200}{\pi}\approx 63{,}66$$

Da $A''(r)=-4\pi<0$ *für alle r, liegt beim berechneten r-Wert ein Maximum vor.*

Für L ergibt sich: $L=\frac{400-2\pi r}{2}=200-\pi r=200-\pi\cdot\frac{100}{\pi}=200-100=100$

Die maximale Fläche hat also den Flächeninhalt

$$A\left(\frac{100}{\pi}\right)=400\cdot\frac{100}{\pi}-2\pi\cdot\left(\frac{100}{\pi}\right)^2=\frac{40000}{\pi}-\frac{20000}{\pi}=\frac{20000}{\pi}\approx 6366$$

Die maximale Fläche mit dem Flächeninhalt 6366 m^2 *hat also die Länge 100,00 m und die Breite 63,66 m.*

zu b):

Da 63,66 m zwischen den Werten 45 m und 90 m liegt und da 100,00 m zwischen den Werten 90 m und 120 m liegt, entspricht das berechnete Feld der Fußballnorm.

---

4 Der Graph einer ganzrationalen Funktion 3. Grades schneidet die x-Achse bei den x-Koordinaten -3 und +1, schneidet die y-Achse mit der Steigung +1 und hat einen Wendepunkt beim x-Wert -0,5.

Bestimmen Sie rechnerisch mit Hilfe des Taschenrechners die Funktionsgleichung.

Aus der Aufgabe ergeben sich die Bedingungen $f(-3)=0;\, f(1)=0;\, f'(0)=1;\, f''(-0{,}5)=0$

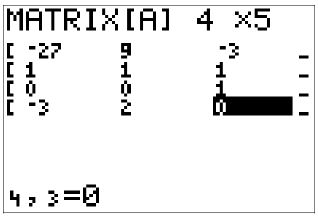
Für die Funktion und ihre Ableitungen berechnet man:

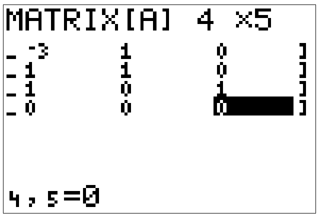
$$f(x)=a\cdot x^3+b\cdot x^2+c\cdot x+d \;\;;\;\; f'(x)=3a\cdot x^2+2b\cdot x+c \;\;;\;\; f''(x)=6a\cdot x+2b$$

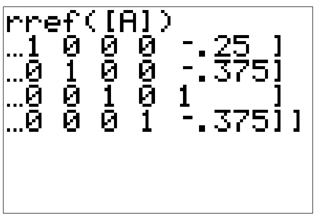
Aus den Bedingungen ergibt sich das Gleichungssystem

$$-27a+9b-3c+d=0 \;\;;\;\; a+b+c+d=0 \;\;;\;\; c=1 \;\;;\;\; 0=-3a+2b$$

Mit den Matrix-Funktionen des Taschenrechners ergeben sich folgende Lösungsschritte:





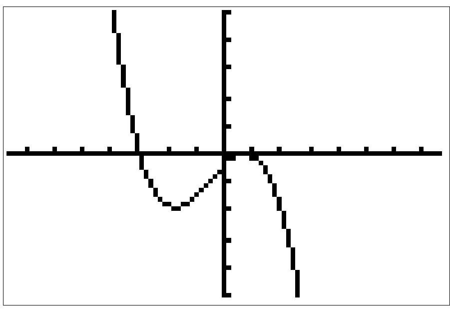


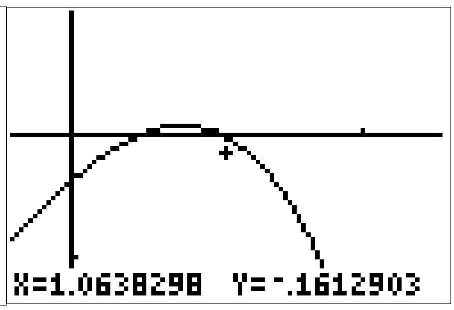
Der Taschenrechner liefert das Ergebnis $a=-0{,}25;\, b=-0{,}375;\, c=1;\, d=-0{,}375$

Es ergibt sich also die Funktionsgleichung $f(x)=-0{,}25\cdot x^3-0{,}375\cdot x^2+x-0{,}375$

Der vom Taschenrechner erzeugte Graph zeigt Übereinstimmung mit den gegebenen Bedingungen.

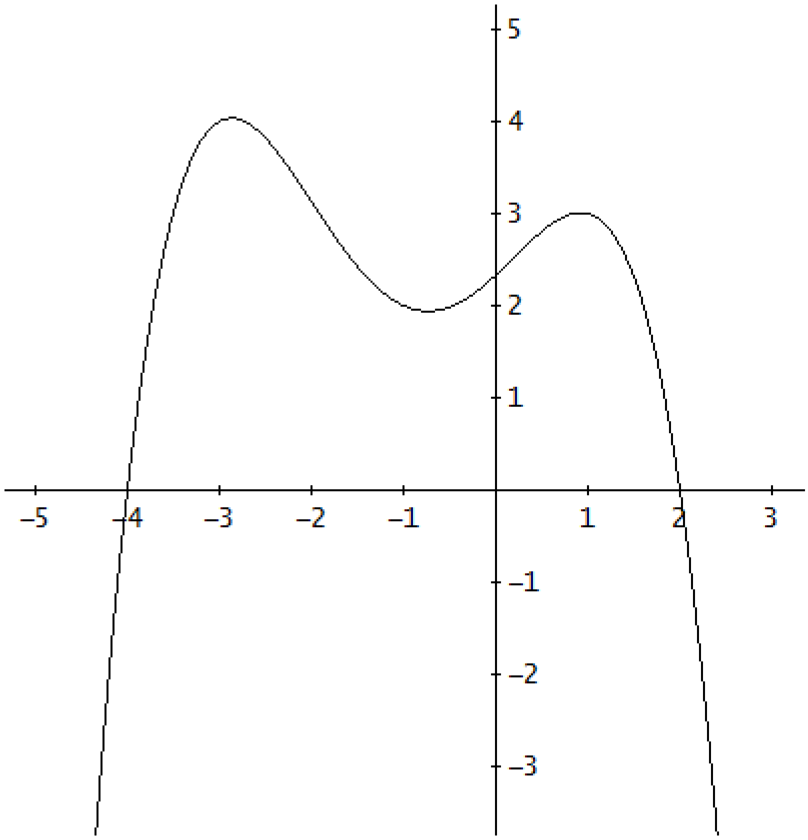
Dass wirklich bei x=1 eine Nullstelle vorliegt (und links daneben eine weitere Nullstelle), zeigt der Zoom im rechten Screenshot.





5 Finden Sie durch Rechnen und Experimentieren mit dem Taschenrechner eine Funktionsgleichung für die unten abgebildete Kurve.

Der Grad der Kurve soll so klein wie möglich (aber natürlich so groß wie nötig) sein.



Aus dem Graphen kann man folgende Bedingungen ablesen:

Der Grad des Graphen muss wegen der 3 Extremstellen mindestens 4 betragen, also gilt $f(x)=a\cdot x^4+b\cdot x^3+c\cdot x^2+d\cdot x+e$.

Für die 5 Parameter sind 5 Bedingungen zu finden.

Der Graph wurde erstellt mit den Bedingungen

$f(-4)=0$

$f(2)=0$

$f(-3)=4$

$f(1)=3$

$f(-1)=2$

Es sind auch andere Bedingungen denkbar.

Hier ergibt sich das Gleichungssystem:

$256\cdot a-64\cdot b+16\cdot c-4\cdot d+e=0$

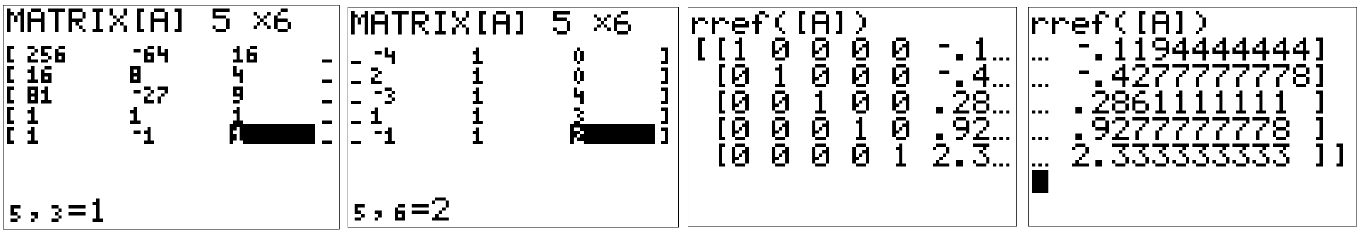
$16\cdot a+8\cdot b+4\cdot c+2\cdot d+e=0$

$81\cdot a-27\cdot b+9\cdot c-3\cdot d+e=4$

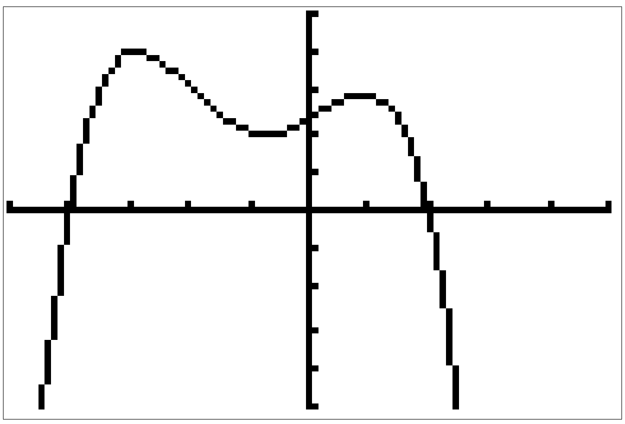
$a+b+c+d+e=3$

$a-b+c-d+e=2$

Mit den Matrixbefehlen ergibt sich die Lösung:



Eine mögliche Funktionsgleichung ist also $f(x)=-0{,}119\cdot x^4-0{,}428\cdot x^3+0{,}286\cdot x^2+0{,}928\cdot x+2{,}333$



Viel Erfolg bei der Bearbeitung der Aufgaben!